Zásobník úloh

Počítání, přemýšlení, zkoušení a testování...
aneb Cvik dělá mistra

V zásobníku úloh, který právě otevíráte, naleznete otevřené úlohy (tj. úlohy, v nichž sami tvoříte odpověď) sloužící k samostatnému procvičení problematiky úvodního univerzitního kurzu *Mechaniky a molekulové fyziky*. Úlohy jsou vybrány tak, aby rozšířily soubor ukázkově řešených úloh a typických úloh k procvičení uvedený v jednotlivých ***Nástrahách***, avšak přitom nebyly zbytečně "klonovány", tj. aby se jen malými obměnami zadání neověřoval stále tentýž poznatek.

****

Kinematika částice

1. Zrychlení částice, která se pohybuje po přímce, se mění podle vztahu $a = \alpha t^2$, kde α je konstanta (určete její fyzikální rozměr). Počáteční rychlost částice je $v\,(t = 0) = v_0$. Určete průměrnou rychlost částice v časovém intervalu $[0, t_0]$.

2. Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru R s periodou T ve směru pohybu hodinových ručiček. Kružnice má směr v počátku soustavy souřadnic a leží v rovině Oxy. V čase $t = 0$ se částice nachází na kladné poloose x.

- **(a)** Určete průměrnou rychlost částice v intervalech $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ a $[0, T]$.
- **(b)** Určete průměrné zrychlení částice v intervalech $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ a $[0, T]$.

3. Určete úhel, pod nímž dopadne na povrch Země částice vržená vodorovně rychlostí $\vec{v}_0$ z výšky h.

4. V okně ve výšce h nad přímým vodorovným chodníkem číhá student s kelímkem naplněným studenou vodou. Po ulici se přibližuje dívka rychlostí o konstantní velikosti v_0. Jaká je vzdálenost dívky od místa přímo pod oknem v okamžiku, kdy má student upustit kelímek tak, aby spadl právě k nohám dívky? Odpor vzduchu zanedbejte.

5. Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru $R = 10$ cm tak, že ji opíše za dobu $T = 4$ s. Ve vhodně zvolené soustavě souřadnic určete okamžitou rychlost, okamžité zrychlení a okamžité úhlové zrychlení (velikosti i směry).

6. Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru $R = 3$ m a vykoná jeden oběh za dobu $T = 20{,}0$ s. Soustavu souřadnic zvolte tak, aby kružnice ležela v rovině xy, její střed na kladné poloose y a osa x k ní byla tečná. V okamžiku $t = 0$ se částice nachází v jejím počátku. Určete:

- **(a)** závislost polohového vektoru $\vec{r}\,(t)$ na čase a polohu částice v okamžicích $t_1 = 5{,}0$ s, $t_2 = 7{,}5$ s, $t_3 = 10{,}0$ s,
- **(b)** vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ v intervalu $[5,0\,\mathrm{s}, 10,0\,\mathrm{s}]$,
- **(c)** vektor průměrné rychlosti v tomto intervalu,
- **(d)** vektor průměrného zrychlení v tomto intervalu,
- **(e)** vektor okamžitého zrychlení na začátku a na konci tohoto intervalu.

(Převzato z [6.].)

7. Automobil se rozjíždí z klidu v kruhové zatáčce rovnoměrně zrychleně. Zakreslete schematicky směr jeho rychlosti a směr jeho zrychlení v okamžiku, kdy opíše úhel $\frac{\pi}{2}$. (Převzato z [11.] a upraveno.)

8. Určete úhel, pod nímž dopadne na povrch Země částice vržená vodorovně rychlostí $\vec{v}_0$ z výšky h.

9. Částice se pohybuje ve svislé souřadnicové rovině xy se zrychlením $\vec{g} = (0, -g, 0)$, které jí udílí homogenní tíhové pole Země. Určete časové závislosti:

   (a) okamžité rychlosti $\vec{v}\,(t)$,
   (b) polohového vektoru $\vec{r}\,(t)$,
   (c) tečného a normálového zrychlení $\vec{a}_\tau\,(t)$, $\vec{a}_n\,(t)$,
   (d) poloměru křivosti trajektorie

   za těchto počátečních podmínek:

   (α) $\vec{r}\,(0) = (0, h, 0)$, $\vec{v}\,(0) = (0, v_0, 0)$,
   (β) $\vec{r}\,(0) = (0, h, 0)$, $\vec{v}\,(0) = (v_0, 0, 0)$,
   (γ) $\vec{r}\,(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v}\,(0) = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha, 0)$.

   (Převzato z [6.].)

10. Ve vzdálenosti r pozorujeme pod úhlem φ těleso, které lze považovat za hmotný bod. Pod jakým elevačním úhlem α musíme vystřelit v okamžiku, kdy toto těleso začíná padat volným pádem, abychom je zasáhli? Jaká musí být počáteční rychlost střely? Odpor vzduchu zanedbejte. (Převzato z [11.].)

Dynamika částice

1. Student si vyrobil speciální skateboard — dřevěný klín na kolečkách, jehož plošina je po umístění na nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α vodorovná. Určete sílu, jíž student na plošinu při jízdě po této nakloněné rovině působí. (Převzato z [11.] a upraveno.)

2. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α leží těleso o hmotnosti m. Koeficient statického tření mezi tělesem a rovinou je f_0. Těleso je vůči nakloněné rovině v klidu, přestože na něj působíme silou $\vec{F}$ dolů podél nakloněné roviny. Určete (okamžitou) velikost statické třecí síly.

3. Na nakloněnou rovinu s měnitelným úhlem sklonu umístíme kostku. Koeficient statického tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je f_0. Jaký musí být úhel sklonu nakloněné roviny, aby kostka zůstala v klidu?

4. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α je umístěn podstavec ve tvaru kvádru o hmotnosti M a na něm hranol o hmotnosti m. Na podstavec působíme silou $\vec{F}$ vzhůru podél nakloněné roviny tak, že podstavec se pohybuje ve směru této síly. Předpokládejte, že je splněna podmínka pro to, aby se hranol vzhledem k podstavci pohyboval. Určete zrychlení (velikost i směr) hranolu vzhledem k Zemi, podstavce vzhledem k Zemi a hranolu vzhledem k podstavci, je-li koeficient dynamického tření mezi hranolem a podstavcem f a tření mezi podstavcem a nakloněnou rovinou je zanedbatelné. (Inspirováno [11.].)

5. Jakou *tlakovou* silou musíme působit na těleso o hmotnosti m přiložené ke svislé stěně, aby se nedalo do pohybu? Koeficient statického tření mezi stěnou a tělesem je f_0.

6. Na dvojité nakloněné rovině s úhly sklonu α a β jsou nehmotným nepružným vláknem přes kladku zanedbatelné hmotnosti spojena tělesa o hmotnostech m_1 a m_2. Koeficient statického tření mezi tělesy a rovinou je f_0, koeficient dynamického tření mezi tělesy a rovinou je f. Odpor vzduchu je zanedbatelný, kladka se může otáčet bez tření. Podrobně popište pohybový stav této soustavy v závislosti na parametrech úlohy (α, β, m_1, m_2, f_0, f). Jakou silou je napínáno vlákno? (Převzato z [6.] a upraveno.)

7. Na vlákně délky l, které je jedním koncem upevněno v bodě O, je zavěšena malá kulička. Napnuté vlákno vychýlíme do horizontální polohy a uvolníme. V bodě B ležícím ve vzdálenosti $l/2$ od bodu O na téže svislé přímce je umístěn hřebík.

   (a) Určete úhel α, který svírá napnuté vlákno se svislicí v okamžiku, kdy je v něm nulový tah.
   (b) Určete rychlost kuličky v tomto bodě.
   (c) Jaká je trajektorie kuličky od okamžiku, kdy je tah ve vlákně nulový?

   Předpokládejte, že odpor vzduchu je zanedbatelný. (Převzato z [11.].)

8. Kruhovou zatáčkou, jejíž úhel klopení je α, projíždí automobil o hmotnosti m rychlostí o velikosti v. Jaký musí být koeficient statického tření mezi pneumatikami a vozovkou, aby byl průjezd zatáčkou bezpečný (tj. aby automobil nedostal smyk)? Automobil považujte za hmotný bod. Úlohu řešte z pohledu inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí i z pohledu neinerciální vztažné soustavy spojené s automobilem. (Inspirováno [4.].)

Soustavy částic, mechanika tuhého tělesa

1. Střela o hmotnosti m a vodorovné rychlosti $\vec{v}_0$ narazí do dolního okraje tyče o délce L a hmotnosti M, která se může otáčet kolem vodorovné osy procházející jejím druhým koncem. Střela se v tyči okamžitě zastaví. Určete úhel, o nějž se tyč vychýlí, je-li odpor vzduchu zanedbatelný. (Inspirováno [11.])

2. Na dvou vodorovných rovnoběžných kolejnicích se nachází válec o poloměru R a hmotnosti M, na němž je kolem těžiště namotáno vlákno. Osa válce je kolmá na kolejnice. Na volný konec vlákna působí svisle dolů síla $\vec{F}$, jejíž velikost je $\frac{1}{2}Mg$. Určete zrychlení těžiště válce (velikost a směr) za předpokladu, že válec nepodkluzuje. Jakou podmínku při tom musí splňovat koeficient statického tření mezi válcem a kolejnicemi? (Převzato z [11.].)

3. Plochý železniční vůz se může pohybovat po přímých vodorovných kolejích bez tření. Člověk stojící na voze drží vodorovnou hadici, do níž je čerpadlem vháněna voda z nádrže tak, že rychlost $\vec{v}_r$ vody vytékající z hadice (vzhledem k hadici) je stálá. Hmotnost vozu s člověkem je M_0, počáteční hmotnost vody v nádrži je m_0, průřez hadice je S. Počáteční rychlost vozu je nulová. Určete rychlost vozu v okamžiku, kdy je nádoba vyprázdněna. (Převzato z [6.].)

4. Tuhá kulička o poloměru r a hmotnosti m se může bez klouzání valit po nepohyblivé nakloněné rovině s úhlem sklonu α zakončené smyčkovou dráhou o poloměru R. Výška nakloněné roviny je h. Vypočtěte velikost svislé i vodorovné síly, jimiž působí smyčka na kuličku při průchodu bodem ležícím ve výšce R nad vodorovnou podložkou. Zjistěte také, zda kulička projde vrcholem smyčky, aniž se od ní oddělí. (Převzato z [6.].)

Práce a energie

1. Chlapec táhne po vodorovné rovině sáňky o hmotnosti m tak, že vektor jeho síly $\vec{F}$ svírá s rovinou úhel α. Jakou práci vykoná na dráze s třecí síla, je-li koeficient dynamického tření mezi sáňkami a podložkou f? Jakou práci vykoná výsledná síla působící na sáňky?

2. Kostka o hmotnosti $m = 250$ g dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 2,5\ \mathrm{N \cdot cm^{-1}}$ a pevně se s ní spojí. Soustava začne kmitat. V okamžiku, kdy kostka poprvé dosáhne bodu obratu, je stlačení pružiny $d = 12$ cm. Určete, jakou práci vykonaly do tohoto okamžiku

   (a) tíhová síla,
   (b) pružná síla?
   (c) Jaká byla rychlost kostky bezprostředně před dopadem na pružinu?
   (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny při dvojnásobné rychlosti dopadu kostky?

   Odpor prostředí zanedbejte. (Převzato z [4.].)

3. Kostka ledu o hmotnosti $m = 100$ kg klouže po nakloněné rovině délky $l = 5$ m a výšce $h = 3$ m. Na počátku pohybu byla kostka v klidu. Proti pohybu kostky působí člověk silou, která svírá s nakloněnou rovinou úhel $\alpha = 30^\circ$. Kostka se pohybuje se stálým zrychlením o velikosti $a = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Koeficient dynamického tření mezi ledem a podložkou je $f = 0,01$. Určete:

   (a) práci, kterou vykoná člověk,
   (b) práci, kterou vykoná tíhová síla,
   (c) práci, kterou vykoná třecí síla,
   (d) práci, kterou vykoná výsledná síla

   od okamžiku uvolnění kostky v horním bodě nakloněné roviny do okamžiku jejího sklouznutí na vodorovnou podložku. (Převzato z [6.].)

Mechanika kapalin

1. Siloměr, na jehož konci je zavěšeno těleso, ukazuje údaj F_1. Ponoříme-li těleso do vody, ukáže siloměr údaj F_2. Určete hustotu tělesa. (Vztlakovou sílu vzduchu zanedbejte. Za jakých okolností je toto zanedbání oprávněné? Vysvětlete.)

2. Jakou silou $\vec{F}$ musíme působit na těleso o objemu V a hustotě ρ, má-li být zcela ponořeno ve vodě? Diskutujte rovněž směr této síly pro všechny přípustné situace.

3. Kostka o straně a a hustotě ρ větší než je hustota vody je ponořena tak, že její horní podstava splývá s vodní hladinou. Jakou práci vykonáme, vytáhneme-li kostku rovnoměrně tak, že hladina splývá s dolní podstavou?

4. Balon o hmotnosti m začal klesat s konstantním zrychlením o velikosti a. Určete hmotnost zátěže, kterou je třeba vyhodit přes palubu, aby balon začal stoupat s týmž zrychlením. (Převzato z [11.].)

5. Ledová kra o konstantní tloušťce 0,2 m plove na hladině jezera. Plošný obsah podstavy kry je 4 $\mathrm{m^2}$, hustota ledu je 920 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

   (a) V jaké výšce nad vodní hladinou je horní podstava kry?

(b) V jaké vzdálenosti od vodní hladiny bude horní podstava kry, položíme-li na ni těleso o hmotnosti 24 kg tak, aby kra zůstala ve vodorovné poloze?
(c) Při jaké zátěži se kra ještě nepotopí?

(Převzato z [11.].)

6. Na vodorovné podložce stojí nádoba naplněná do výšky h vodou. Jak vysoko nad podložkou je třeba udělat malý otvor, aby voda stříkala co nejdále? (Převzato z [11.])

7. Válcová nádoba je naplněna do výšky 40 cm. Ve stěně nádoby jsou dva otvory téhož průřezu, jeden ve výšce 10 cm a druhý ve výšce 30 cm nade dnem nádoby. Určete poměr hmotnostních toků z obou otvorů. (Převzato z [11.])

Základy termodynamiky a statistické fyziky

1. Vypočtěte změnu vnitřní energie n molů ideálního plynu při izobarické změně objemu na hodnotu α-krát větší, je-li počáteční teplota T_1 a tepelná kapacita plynu při konstantním tlaku C_p.

2. Schematicky zakreslete graf izochorického, izobarického, izotermického a adiabatického děje s ideálním plynem:

   (a) v p, T diagramu,
   (b) ve V, T diagramu.

   (Převzato z [11.].)

3. Ideální plyn se rozpínal podle vztahu $p = \alpha V$, kde α je konstanta. Počáteční objem plynu byl V_0, konečný objem plynu byl η-krát větší. Poissonova konstanta je γ. Určete:

   (a) přírůstek vnitřní energie plynu,
   (b) práci vykonanou plynem,
   (c) molární měrnou tepelnou kapacitu plynu při tomto procesu.

   (Převzato z [11.].)

4. Ve válci, který je naplněn vzduchem a na obou koncích uzavřen, se nachází píst, který rozděluje objem válce na dvě stejné části, v nichž je atmosferický tlak. Jestliže píst nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy a potom jej uvolníme, začne konat harmonický kmitavý pohyb (dokažte). Určete periodu těchto kmitů za předpokladu, že děj v plynu lze považovat za

   (a) izotermický,
   (b) adiabatický.

   (Převzato z [11.].)

5. Tepelný stroj, jehož pracovní látkou je 1 kmol ideálního plynu, pracuje v cyklu složeném ze tří za sebou následujících vratných dějů:

   - plyn se izobaricky ohřeje z původního objemu V_1 a teploty T_1 na teplotu T_2,
   - plyn adiabaticky zvětší svůj objem tak, že jeho teplota klesne na počáteční hodnotu T_1,
   - plyn se izotermicky stlačí na počáteční objem V_1.

   (Převzato z [11.].)

6. Tepelný stroj, jehož pracovní látkou je 1 kmol ideálního plynu, pracuje v cyklu složeném ze tří za sebou následujících vratných dějů:

- plyn se izobaricky ohřeje z původního objemu V_1 a teploty T_1 na teplotu T_2,
- plyn adiabaticky zvětší svůj objem tak, že jeho teplota klesne na počáteční hodnotu T_1,
- plyn se izotermicky stlačí na počáteční objem V_1.

Vypočtěte účinnost tohoto stroje.