
Nástraha pátá

Výtahy, vlaky, kolotoče, ...

aneb Co nás čeká v neinerciálních soustavách?

Úlohy, jimiž jsme se v předchozích *Nástrahách* zabývali, měly jedno společné: řešili jsme je ve vztažné soustavě spojené se Zemí a tuto (tzv. *laboratorní*) vztažnou soustavu jsme považovali za soustavu *inerciální*. Vztažné soustavy, které nás denně obklopují — a to nejen například rozjíždějící se či brzdící dopravní prostředky, ale přesně vzato také samotná Země¹ — však patří k soustavám *neinerciálním*. Existuje způsob, jak řešit úlohy z dynamiky hmotného bodu i v těchto soustavách? Víme přece, že Newtonovy zákony v nich neplatí!

Věci znalý čtenář prohlásí: "Nevadí — vezmeme v úvahu setrvačné (fiktivní) síly a budeme s nimi počítat jako se silami ostatními." Jakkoli se tento závěr může zdát jasný a výstižný, opět v sobě skrývá nástrahy: i s jednoduchými prostředky je totiž třeba umět dobře zacházet. O tom, že tomu tak není vždy, nás opět přesvědčují středoškolské učebnice, z nichž vybíráme první ukázkou:

Ukázka první — učebnicová ([1.])

V neinerciálních vztažných soustavách nezůstává izolované těleso v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Na těleso v neinerciální vztažné soustavě působí setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{a}$, vznikající jako důsledek zrychleného pohybu soustavy.

⋮

Setrvačné síly existují jen v neinerciálních vztažných soustavách, v inerciálních nikoli. Setrvačné síly jsou pro pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě reálné stejně jako síly vzájemného působení mezi tělesy a mohou se s těmito silami skládat.

Student si po přečtení učebnicové kapitoly korunované citovanými formulacemi snadno (a nadlouho) zafixuje, že setrvačné síly "*reálně existují*", a často o nich pak nesprávně uvažuje i při řešení úloh v inerciálních vztažných soustavách (jde především o "sílu odstředivou" při studiu pohybu hmotného bodu po kružnici ([14.])). K závěru o "reálnosti setrvačných sil" a o jejich "reálných účincích" pravděpodobně dospěje i čtenář, který v encyklopedii nalistuje heslo "*Coriolisova síla*" (tuto sílu zná středoškolák spíše ze zeměpisu než z fyziky):

Ukázka druhá — encyklopedická ([24.])

Coriolisova síla, zvl. odstředivá síla uplatňující se při relativním pohybu hmotného bodu v nesetrvačné otáčející se soustavě. Složkou celk. zrychlení je zde Coriolisovo zrychlení. C.s. vyvolává např. u pohybujících se těles (při pohledu ve směru pohybu) odchylku doprava na sev. polokouli, doleva na již. polokouli. V přírodě C.s. ovlivňuje např. cirkulaci atmosféry, mořské proudy, toky řek.

Protože nemá smysl pouštět se do řešení úloh a nemít při tom v otázce setrvačných sil naprosté jasno, uvedeme nejprve věci na pravou míru.

¹Nebude-li řečeno jinak (například *Úloha 2.*), budeme vztažnou soustavu spojenou se Zemí i nadále považovat za soustavu inerciální. Tento předpoklad je pro běžné děje, které sledujeme v krátkých časových intervalech, s dobrou přesností splněn.

Důležité:

Při řešení úloh v inerciálních vztažných soustavách se z Newtonových zákonů nejčastěji uplatňuje druhý,

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_v,$$

v němž \vec{a} označuje zrychlení hmotného bodu (částice) vzhledem k dané vztažné soustavě a \vec{F}_v označuje výslednici sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_{n-1}, \vec{F}_n$, jimiž na sledovaný hmotný bod působí okolní hmotné objekty. Pro síly \vec{F}_i , $1 \leq i \leq n$, tzv. *reálné síly*, platí třetí Newtonův zákon — stejně velkými opačně orientovanými silami působí sledovaný hmotný bod na okolní hmotné objekty.

V neinerciálních vztažných soustavách, jak známo, druhý Newtonův zákon neplatí. Protože jde ale o poměrně silný nástroj s celou řadou aplikací, vzdávali bychom se jej jen neradi: naší snahou tedy bude vhodně jej *modifikovat* a "rozšířit" tak jeho platnost i na neinerciální vztažné soustavy. Ukazuje se (viz **Hlavní text**), že tato modifikace spočívá v zahrnutí *setrvačné* (nebo také *fiktivní*) síly \vec{F}^* . Platí

$$m\vec{a}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n + \vec{F}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}^*,$$

kde \vec{a}' označuje zrychlení hmotného bodu vzhledem k neinerciální vztažné soustavě. Je nezbytné zdůraznit, že setrvačná síla *nemá* původ ve vzájemné interakci sledovaného hmotného bodu s okolními hmotnými objekty, a proto na ni ve smyslu třetího Newtonova zákona neexistuje reakce. Není tedy ničím jiným než pouze *opravným členem* s fyzikálním rozměrem síly, který umožňuje formálně rozšířit platnost druhého Newtonova zákona i na neinerciální vztažné soustavy a který s ostatními, *reálnými*, silami formálně sčítáme podle obvyklých pravidel pro počítání s vektory.

Na střední škole se zpravidla vystačí s nejjednodušší situací, kdy se neinerciální vztažná soustava vzhledem k inerciální pohybuje translačně (tj. její osy se neotáčejí) se zrychlením \vec{a}_t . Potom

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_t.$$

Protože se čtenář může setkat i s jinými typy setrvačných sil, například s často zmiňovanou silou Coriolisovou, uvedeme zde pro informaci zcela obecný zápis setrvačné síly (viz např. [3.], [8.], částečně i [10.]), jehož pochopení vyžaduje jistou matematickou pokročilost — znalost vektorového součinu:

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_t - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'),$$

kde \vec{r}' je polohový vektor hmotného bodu v neinerciální vztažné soustavě, \vec{v}' je jeho rychlost, $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost neinerciální vztažné soustavy vzhledem k soustavě inerciální a $\vec{\varepsilon}$ je odpovídající úhlové zrychlení. Vidíme, že setrvačnou sílu tvoří součet čtyř členů: *translační setrvačné síly*

$$\vec{F}_t^* = -m\vec{a}_t,$$

odstředivé setrvačné síly (přívlastek "odstředivá" vyjadřuje směr a orientaci této síly)

$$\vec{F}_o^* = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] ,$$

Coriolisovy setrvačné síly

$$\vec{F}_C^* = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

a *Eulerovy setrvačné síly*

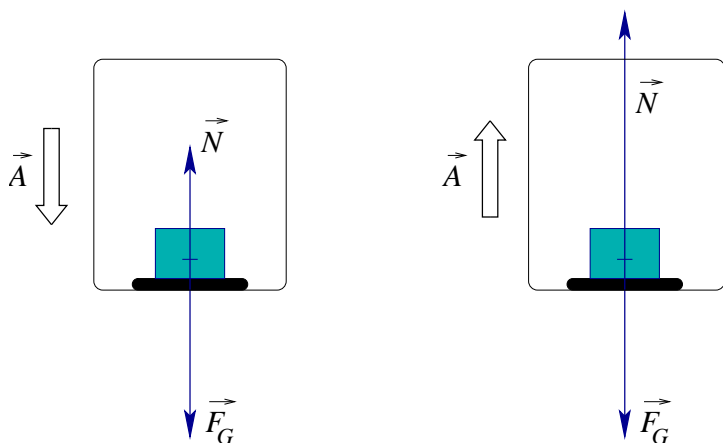
$$\vec{F}_E^* = -m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}') .$$

Po rekapitulaci rozdílu mezi formulací druhého Newtonova zákona v inerciální a v neinerciální vztažné soustavě již můžeme přistoupit k řešení úloh. Uvidíme, že někdy je náročnost řešení z hlediska inerciální i z hlediska neinerciální vztažné soustavy srovnatelná (**Úloha 1.**), jindy je přirozenější řešit úlohu v neinerciální vztažné soustavě (**Úloha 2.**) a konečně existují situace, v nichž je snazší řešit úlohu v inerciální vztažné soustavě a výsledek pak transformovat do dané soustavy neinerciální (**Úloha 3.**)².

Úloha 1.:

Na podlaze výtahu leží pružinové váhy cejchované v kilogramech. Jaký údaj ukazují, stoupne-li si na ně pasažér o hmotnosti m a výtah se pohybuje s konstantním zrychlením \vec{A} ? Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího na schodišti (inerciální vztažná soustava) i z hlediska pasažéra jedoucího ve výtahu (neinerciální vztažná soustava). Provedte diskuzi výsledku v závislosti na orientaci vektoru \vec{A} .

Řešení v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí:



Obrázek 1: Silový diagram pro pasažéra — inerciální vztažná soustava

Na pasažéra působí dvě reálné síly: tíhová síla Země \vec{F}_G a tlaková síla podložky (vah) \vec{N} (viz Obrázek 1). Protože se pasažér vzhledem k Zemi pohybuje se stejným zrychlením jako výtah (vazební podmínka $\vec{a} = \vec{A}$), má druhý Newtonův zákon tvar

$$m\vec{A} = \vec{F}_G + \vec{N}.$$

Uvážením směru jednotlivých vektorů a silového zákona pro velikost tíhové síly $F_G = mg$

dostáváme

$$\pm mA = mg - N \quad \implies \quad N = m(g \mp A),$$

přičemž horní z dvojice znamének u velikosti zrychlení odpovídá situaci znázorněné v první části Obrázku 1 (výtah se rozjíždí dolů, nebo brzdí při pohybu vzhůru). Jak již jsme uvedli, tlaková síla podložky (vah) \vec{N} je silou reálnou. Podle třetího Newtonova zákona tedy působí pasažér na váhy silou stejně velkou, ale opačně orientovanou. Váhy pak ukazují údaj \bar{m} , pro nějž platí

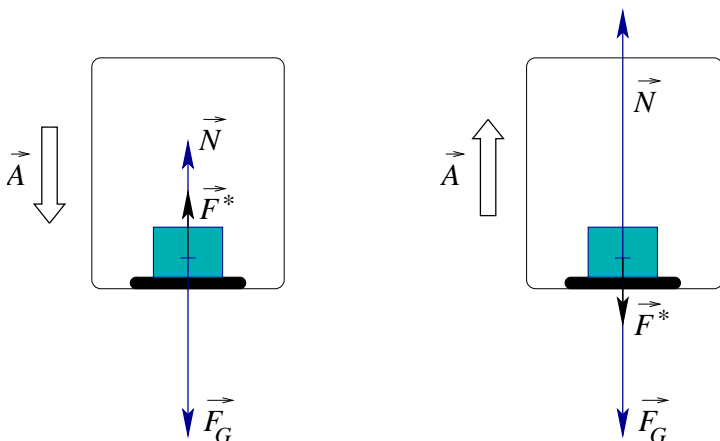
$$N = \bar{m}g \quad \implies \quad \bar{m} = \frac{N}{g} = m \left(1 \mp \frac{A}{g} \right).$$

Diskuze výsledku:

Výsledek je ve shodě se zkušenostmi z výtahu: pokud se výtah rozjíždí dolů, nebo brzdí při pohybu vzhůru (viz první část Obrázku 1), je tlaková síla podložky menší než v případě, že se výtah pohybuje rovnoměrně, a váhy tak povzbudivě ukazují menší údaj ($\bar{m} < m$). Pokud se výtah rozjíždí vzhůru, nebo brzdí při pohybu dolů (viz druhá část Obrázku 1), je tlaková síla podložky naopak větší a větší údaj ukazují také váhy ($\bar{m} > m$).

²Dodejme, že někteří autoři (např. [4.]) setrvačné síly vůbec nezavádějí a úlohy řeší výhradně v inerciálních vztažných soustavách.

Řešení v neinerciální vztažné soustavě spojené s výtahem:



Obrázek 2: Silový diagram pro pasažéra — neinerciální vztažná soustava (setrvačná síla je nyní zvýrazněna černě)

a silového zákona pro velikost tíhové síly $F_G = mg$ dostáváme

$$0 = mg - N \mp mA \quad \implies \quad N = m(g \mp A) ,$$

přičemž horní z dvojice znamének opět odpovídá situaci znázorněné v první části Obrázku 2. Další postup je již stejný jako při řešení úlohy z hlediska inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí. \diamond

V souvislosti s předchozí úlohou se přímo nabízí (opět) zdůraznit jednu důležitou skutečnost.

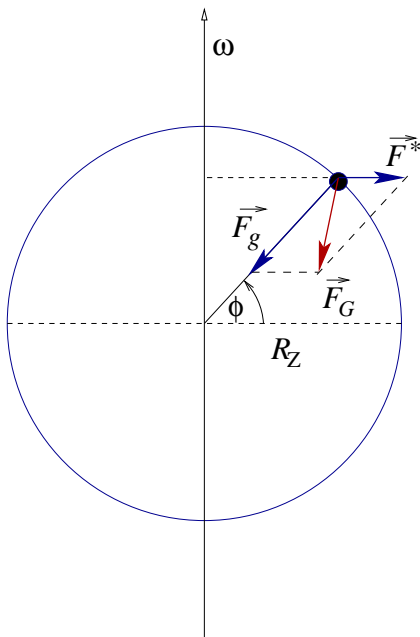
Důležité:

Přemýšleli jste někdy, proč některým lidem bývá špatně v dopravních prostředcích nebo na koločích? Odhlédneme-li od rychle se střídajících zrakových vjemů, zbývá jediná příčina: změny tlakových sil \vec{N}_i , které působí na jednotlivé orgány. V žádném případě tedy nejde o "projevy setrvačných sil", jak si lidé často myslí: setrvačné síly totiž *nejdou* reálnými silami, ale pouze *opravnými členy* umožňujícími formálně rozšířit platnost druhého Newtonova zákona i na neinerciální vztažné soustavy.

Vraťme se nyní k dynamice křivočarého pohybu — konkrétně k **Úloze 1.** a k **Úloze 2.** **Nástrahy čtvrté.** Zatímco k řešení **Úlohy 1.** z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s kuličkou by asi přistoupil málokdo (i když, možné to samozřejmě je, jen je nutné uvědomit si, že setrvačná síla má *obecně nenulovou* jak tečnou, tak normálovou složku), řešení **Úlohy 2.** v neinerciální vztažné soustavě lze vídat poměrně často (vyzkoušejte). Zde, s ohledem na důležitost navazující diskuze, zařazujeme poněkud jinou úlohu na pohyb hmotného bodu po kružnici.

Úloha 2.:

Vysvětlete rozdíl mezi gravitační a tíhovou silou. Zemi považujte za homogenní kouli o hmotnosti M_Z a o poloměru R_Z .



Obrázek 3: K definici tíhové síly

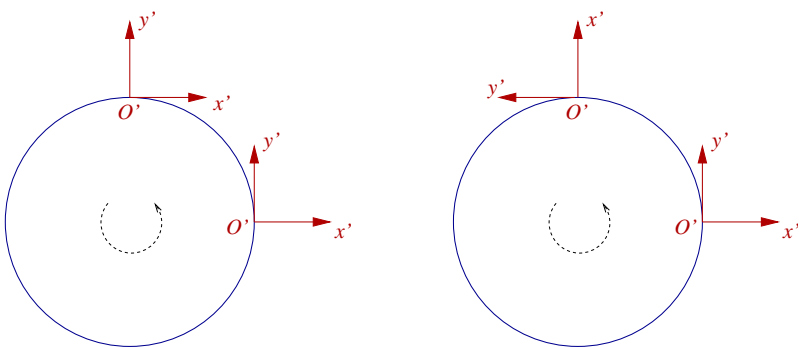
setrvačné (odstředivé) nazýváme *tíhovou silou* (na Obrázku 3 je vyznačena červeně), tj.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}^* .$$

Zrychlení $\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$, které tato síla udílí částici o hmotnosti m , nazýváme *tíhovým zrychlením*.

Diskuze výsledku:

Ze vztahů, které jsme uvedli v průběhu řešení, je zřejmé, že pozemský pozorovatel není schopen experimentálně rozlišit gravitační působení od "působení" setrvačné (odstředivé) síly: zaznamenává a měří pouze jejich výslednici — sílu tíhovou. Tato síla se mění se zeměpisnou šířkou, nejmenší je na rovníku a největší je na pólech. Vidíme tedy, že formulace "na těleso působí Země tíhovou silou" je do jisté míry vnitřně rozporuplná. Orientovaný čtenář však nyní jistě ví, jak jí rozumět.



Obrázek 4: Zavedení vztažné soustavy spojené částicí (pohled proti směru zemské osy)

dené inerciální soustavě neotáčejí, ve druhé části je "čárkovaná" soustava souřadnic pevně spo-

Řešení:

Víme již, že vztažná soustava spojená se Zemí je soustavou neinerciální — především proto, že Země se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí, jejíž velikost ω budeme pro jednoduchost považovat za konstantní³.

Všimněme si částice o hmotnosti m umístěné na zemském povrchu v místě o zeměpisné šířce ϕ . Tato částice se vzhledem k inerciální vztažné soustavě, která se spolu se Zemí pohybuje kolem Slunce, ale neotáčí se, pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru $R_Z \cos \phi$ (viz Obrázek 3). Počátek neinerciální vztažné soustavy ztotožněný s naší částicí se tedy vzhledem k uvažované inerciální vztažné soustavě pohybuje s dostředivým zrychlením. Při formulaci druhého Newtonova zákona pro částici je proto nutné kromě gravitační síly o velikosti $F_g = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z^2}$ směřující do středu Země a eventuálně jiných reálných sil uvážit již známý opravný člen — sílu *setrvačnou (odstředivou)* \vec{F}^* o velikosti $F^* = m\omega^2 R_Z \cos \phi$. Výslednici gravitační síly a síly

Poznámka:

Pozorný čtenář jistě postřehl nedůslednost, s níž jsme zavedli vztažnou soustavu spojenou s částicí: určili jsme její počátek O' , ale nic jsme neřekli o směru jejích os x' , y' a z' . Jistě si lze představit přinejmenším dvě různé situace (viz Obrázek 4: v jeho první části se "čárkované" osy vzhledem k výše zavedené

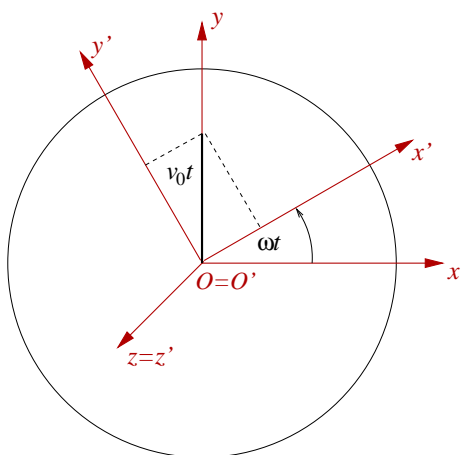
³Skutečnost, že střed Země se pohybuje kolem Slunce po zakřivené trajektorii, v prvním přiblížení neuvažujeme.

jená se Zemí). Projeví se tato nejednoznačnost při řešení úlohy? Určitě ne — stačí si připomenout obecný vztah pro setrvačnou sílu uvedený na str. 2: Počátek jakékoli vztažné soustavy spojené s částicí umístěnou na zemském povrchu se pohybuje s translačním zrychlením, které je zrychlením dostředivým, tj. $\vec{a}_t = \vec{a}_d$. Odpovídající setrvačná (translační) síla $\vec{F}^* = \vec{F}_t^* = -m\vec{a}_d$ se zde vzhledem ke své orientaci doplňuje přívlastkem "odstředivá", jde však o jinou sílu než $\vec{F}_o^* = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')]$, která je nulová, neboť částice je v počátku soustavy souřadnic v klidu ($\vec{r}' = \vec{0}$). Ze stejného důvodu je nulová i setrvačná síla Coriolisova a setrvačná síla Eulerova.

Jinak tomu bude v případě, že se částice vzhledem k neinerciální vztažné soustavě *pohybuje* (čtenář jistě slyšel o tzv. Foucaultově kyvadle, jehož rovina kmitů se díky rotaci Země stáčí). Nalezení trajektorie částice v rotující vztažné soustavě je však v plné obecnosti poměrně komplikovanou záležitostí, která přesahuje rámec tohoto textu. V následující **Úloze 3.** popíšeme alespoň jednu z nejjednodušších situací ([15.]) \diamond

Úloha 3.:

Na vodorovné točně, která se otáčí konstantní úhlovou rychlostí o velikosti ω , se pohybuje částice o hmotnosti m . Předpokládejme, že v okamžiku $t = 0$ se částice nachází ve středu točny a její rychlost je \vec{v}_0 . Ve vhodně zvolené soustavě souřadnic nalezněte závislost polohového vektoru částice jak vzhledem k Zemi, tak vzhledem k točně. Tření i odpor vzduchu zanedbejte.



Obrázek 5: Pohyb částice na točně

Řešení v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí:

Na částici působí dvě reálné síly: tíhová síla Země \vec{F}_G a tlaková síla podložky \vec{N} . Druhý Newtonův zákon má tedy tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N}.$$

Zvolme soustavu souřadnic $Oxyz$ spojenou se Zemí tak, že její počátek je ztotožněn se středem točny, osa y má stejnou orientaci jako vektor rychlosti částice \vec{v}_0 v okamžiku $t = 0$ a osa z směřuje vzhůru (viz Obrázek 5). Složky jednotlivých vektorů jsou, s uvážením vazební podmínky, že částice se pohybuje pouze ve vodorovné rovině,

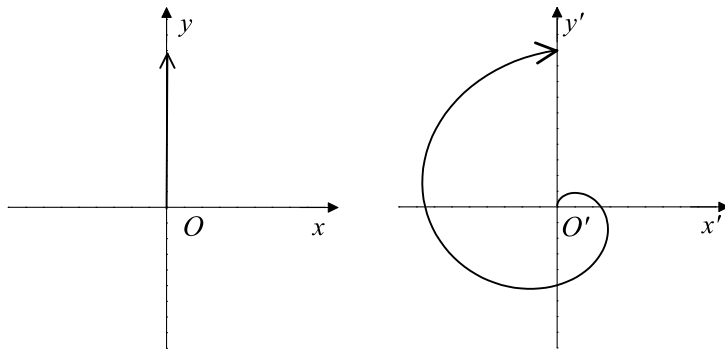
$$\vec{F}_G = (0, 0, -F_G), \quad \vec{N} = (0, 0, N), \quad \vec{a} = (a_x, a_y, 0).$$

Z druhého Newtonova zákona zapsaného ve složkách

$$\begin{aligned} x : \quad & ma_x = 0, \\ y : \quad & ma_y = 0, \\ z : \quad & 0 = F_G - N \end{aligned}$$

vychází $\vec{a} = (0, 0, 0) = \vec{0}$, což znamená, že částice se vzhledem k Zemi pohybuje rovnoměrně přímočaře. Její trajektorii je ve zvolené soustavě souřadnic kladná poloosa y (viz Obrázek 6), tj.

$$\vec{r}(t) = (0, v_0t, 0).$$



Obrázek 6: Trajektorie částice vzhledem k Zemi a vzhledem k točně

obejít: zvolíme-li soustavu souřadnic $O'x'y'z'$ spojenou s točnou tak, že v okamžiku $t = 0$ splývá se soustavou $Oxyz$, platí pro polohový vektor částice (viz Obrázek 5, Obrázek 6)

$$\vec{r}'(t) = (v_0 t \sin \omega t, v_0 t \cos \omega t, 0) .$$

◇

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Vraťte se k **Ukázkám** na str. 1 a přeformulujte je tak, aby jasně a stručně vystihovaly podstatu setrvačných sil.
2. S jakým zrychlením se pohybuje výtah, jehož pasažér je ve stavu beztíže? Jaký údaj v tomto případě ukazují pružinové váhy, na nichž pasažér stojí?
3. Vraťte se k **Úlohám 1., 3., 4. a 5. z Nástrahy čtvrté** (str. 5. a 6.) a vyřešte je jak z hlediska inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí, tak z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s kuličkou.
4. Vlak se rozjíždí po přímé vodorovné trati s konstantním zrychlením \vec{A} . Na podlaze jednoho z vagónů leží bedna o hmotnosti m . Jakou podmínku musí splňovat velikost zrychlení vlaku, aby bedna zůstala vzhledem k vagónu v klidu, je-li koeficient statického tření mezi bednou a podlahou f_0 ? Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího na nástupišti (inerciální vztažná soustava) i z hlediska cestujícího ve vlaku (neinerciální vztažná soustava).
5. S jakým zrychlením se pohybuje bedna vzhledem k vagónu a vzhledem k nástupišti, nesplňuje-li velikost zrychlení vlaku podmínku odvozenou v předchozí úloze? Koeficient dynamického tření mezi bednou a podložkou je f , odpor vzduchu zanedbejte.
6. Popište rovnovážnou polohu kuličky zavěšené na niti délky l na stropě vagónu, který projíždí rychlostí o konstantní velikosti v_0 zatáčkou o poloměru R . Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího na nástupišti (inerciální vztažná soustava) i z hlediska cestujícího ve vlaku (neinerciální vztažná soustava).
7. Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α umístěné ve výtahu, který jede s konstantním zrychlením \vec{A} , se pohybuje kostka o hmotnosti m . Určete její zrychlení vzhledem k výtahu. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je f , odpor vzduchu zanedbejte.

8. Porovnejte subjektivní pocity pasažéra
- (a) při rychlém a při pomalém průjezdu vozíčku horské dráhy ostrou zatáčkou ležící ve vodorovné rovině,
 - (b) při rychlém a při pomalém průjezdu vozíčku nejvyšším bodem "spirály smrti" (smyčky tvaru kružnice ležící ve svislé rovině).

Které síly tvoří v jednotlivých případech sílu dostředivou? Kdy je nutné pasažéra pevně připoutat k sedadlu? Proč?

9. Kolotoč "Lochnesku" tvoří kruhový disk o poloměru R , v jehož středu je umístěn basketbalový koš a na obvodu jsou rozmístěny sedačky pro hráče. Hráč dokáže hodit míč rychlostí o velikosti v_0 .
- (a) Jak musí hráč mířit, aby zasáhl koš, je-li kolotoč v klidu?
 - (b) Jak musí hráč mířit, aby zasáhl koš, otáčí-li se kolotoč konstantní úhlovou rychlostí o velikosti ω ? Jakou podmínku musí splňovat zadané veličiny, aby hráč skutečně mohl koš zasáhnout?

Předpokládejte, že rovina kolotoče je vodorovná a odpor vzduchu je zanedbatelný.

Příbuzné texty:

- ▷ *Hlavní text*
- ▷ *Nástraha první*
Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- ▷ *Nástraha druhá*
Vektory, průměty, složky, velikosti, ... aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- ▷ *Nástraha třetí*
Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?
- ▷ *Nástraha čtvrtá*
Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?
- ▷ *Nástraha šestá*
Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa
- ▷ *Nástraha sedmá*
Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- ▷ *Nástraha osmá*
Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- ▷ *Nástraha devátá*
Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce
- ▷ *Nástraha desátá — bonusová*
Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"