Nástraha třetí
Rozumíme silám tření?
aneb K čemu slouží vazební podmínky?

Se silami tření se setkáváme "na každém kroku" — bez výjimky totiž provázejí *všechny reálně probíhající mechanické pohyby*. Většinou je však vnímáme spíše v negativním kontextu: tření vede v praxi ke ztrátám, a proto se snažíme omezit jeho vliv na minimum, v zadání úloh zase čteme pokyn "tření zanedbejte", který má jejich řešení zjednodušit. Ne každý si pak plně uvědomuje, že bez přítomnosti tření by většina (i životně důležitých(!)) pohybů vůbec neprobíhala. Napomáhají tomu i středoškolské učebnice ([1.]), které význam tření pro každodenní život patřičně nevyzdvihují a problematice věnují nanejvýš krátkou informativní kapitolku, v níž je bez nezbytné návaznosti na Newtonovy zákony zaveden koeficient statického a dynamického tření. O důsledcích se snadno může přesvědčit každý sám — stačí položit několika náhodně vybraným "obětem" pár jednoduchých otázek.

Zeptejte se ostatních:

1. Na stole leží kniha. Víme, že má hmotnost m, že koeficient statického tření mezi knihou a stolem je f_0 a že koeficient dynamického tření mezi knihou a stolem je f. Jak velká třecí síla na knihu působí?
2. Jaká třecí síla (velikost a směr) působí na sportovce, který se rozbíhá po atletické dráze? Měnilo by se něco, kdyby se tentýž sportovec pokoušel rozběhnout v polobotkách s hladkou podrážkou po namrzlém chodníku?
3. Působí třecí síly *vždy* proti pohybu tělesa?

Najdete-li skutečně chuť a odvahu ptát se, budete možná překvapeni různorodostí odpovědí i tím, jak si závěry vyvozené tímtéž člověkem nejednou protiřečí ([13.]). Abychom odhalili nástrahy skryté v těchto — na první pohled zcela bezelstných — otázkách a současně získali správné odpovědi, vyřešíme trojici úloh, jež postupně odkrývají specifika třecích sil, která učebnice nechávají bez povšimnutí.

Úloha 1.:

Na vodorovné podložce leží kostka o hmotnosti m. V okamžiku $t = 0$ začne na kostku působit vodorovná síla $\vec{F}$, jejíž velikost roste podle vztahu $F = kt$, kde k je konstanta. Koeficient statického tření mezi kostkou a podložkou je f_0.

(a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda se od okamžiku $t = 0$ bude kostka vzhledem k podložce pohybovat.

(b) Pokud je předchozí odpověď záporná, určete velikost, směr a orientaci všech sil, které na kostku působí v libovolném okamžiku $0 \leq t \leq t_0$, kde t_0 je okamžik, kdy se dá kostka vzhledem k podložce do pohybu.

(c) Určete okamžik t_0.

Od okamžiku t_0, kdy se dá kostka vzhledem k podložce do pohybu, se již velikost síly $\vec{F}$ nemění, tj. $F = kt_0$. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podložkou je f, odpor vzduchu zanedbáváme.

(d) Určete velikost, směr a orientaci všech sil, které na kostku působí v libovolném okamžiku $t > t_0$.

(e) V libovolném okamžiku $t > t_0$ určete velikost zrychlení kostky vzhledem k podložce.

(f) Schematicky zakreslete graf závislosti velikosti síly $\vec{F}$ a velikosti třecí síly mezi kostkou a podložkou na čase pro $0 \leq t \leq 2t_0$.

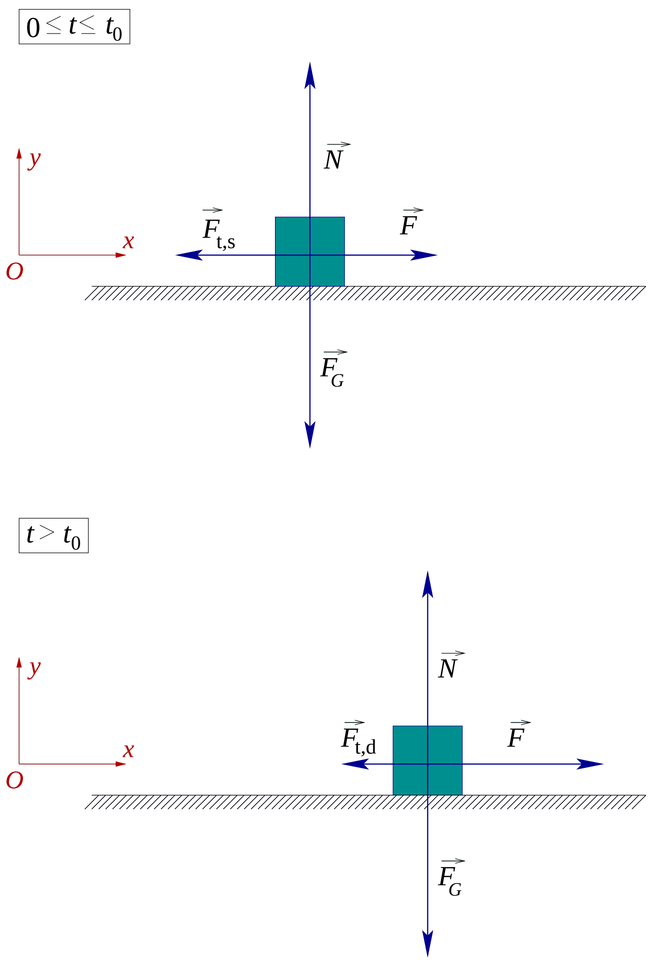
(Převzato z [6.] a upraveno.)

Řešení:

Úlohu budeme řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí.

(a) V okamžiku $t = 0$ se kostka vzhledem k podložce pohybovat *nezačne*: s ohledem na každodenní zkušenost můžeme zjednodušeně říci, že "kostka se vzhledem k podložce pohne až poté, co velikost síly $\vec{F}$ překoná statickou třecí sílu, tedy až v okamžiku $t_0 > 0$". Toto tvrzení budeme v dalších částech úlohy ještě precizovat.

(b) V libovolném okamžiku $0 \leq t \leq t_0$ působí na kostku tažná síla $\vec{F}$, tíhová síla Země $\vec{F}_G$, tlaková síla podložky $\vec{N}$ a *statická* (kostka je vzhledem k podložce v klidu) třecí síla $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}$ (viz první část Obrázku 1, v němž jsme vektory působících sil zakreslili do těžiště kostky (vysvětlete)).



Obrázek 1: Silové diagramy pro kostku

Druhý Newtonův zákon pro kostku zní

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,s}}\,.$$

V soustavě souřadnic Oxy s osou x souhlasně rovnoběžnou s $\vec{F}$ a osou y orientovanou vzhůru mají vektory působících sil složky

$$\vec{F} = (F, 0)\,, \qquad \vec{F}_G = (0, -F_G)\,,$$

$$\vec{N} = (0, N)\,, \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,s}} = (-F_{\mathrm{t,s}}, 0)\,,$$

vektor zrychlení má s uvážením vazební podmínky (kostka je vzhledem k podložce v klidu) složky

$$\vec{a} = \vec{0} = (0, 0)\,.$$

Druhý Newtonův zákon pro kostku zapsaný ve složkách

$$\begin{aligned} x: \qquad 0 &= F - F_{\mathrm{t,s}}\,, \\ y: \qquad 0 &= N - F_G \end{aligned}$$

doplníme silovým zákonem pro velikost tíhové síly $F_G = mg$ a předepsaným vztahem pro velikost tažné síly $F = kt$. (Jaký je fyzikální rozměr konstanty k?).

Získáme tak soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x: \qquad 0 &= kt - F_{\mathrm{t,s}}\,, \\ y: \qquad 0 &= N - mg \end{aligned}$$

pro dvě neznámé: okamžitou velikost statické třecí síly $F_{\mathrm{t,s}}$ a velikost tlakové síly podložky N. Její řešení je

$$F_{\mathrm{t,s}} = kt\,, \qquad\qquad N = mg\,.$$

(c) Okamžik t_0, v němž se dá kostka vzhledem k podložce do pohybu, již určíme snadno. Platí, že velikost statické třecí síly v něm nabývá své *maximální přípustné hodnoty*

$$F_{\mathrm{t,s}}^{\max} = f_0 N\,,$$

s uvážením právě získaných výsledků tedy

$$F_{\mathrm{t,s}}^{\max} = f_0 N = mgf_0 = kt_0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \frac{mgf_0}{k}\,.$$

(d), (e) V libovolném okamžiku $t > t_0$ působí na kostku opět tažná síla $\vec{F}$, tíhová síla Země $\vec{F}_G$, tlaková síla podložky $\vec{N}$ a — protože se kostka vzhledem k podložce již pohybuje — *dynamická* třecí síla (viz druhá část Obrázku 1). Druhý Newtonův zákon pro kostku je tedy nyní

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,d}}\,.$$

V již zavedené soustavě souřadnic Oxy mají vektory jednotlivých sil složky

$$\vec{F} = (F, 0)\ , \qquad \vec{F}_G = (0, -F_G)\ , \qquad \vec{N} = (0, N)\ , \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,d}} = (-F_{\mathrm{t,d}}, 0)\ ,$$

vektor zrychlení má s uvážením vazební podmínky (kostka se pohybuje pouze ve vodorovném směru) složky

$$\vec{a} = (a, 0)\,.$$

Druhý Newtonův zákon pro kostku zapsaný ve složkách

$$\begin{aligned} x: &\qquad ma &= F - F_{\mathrm{t,d}}\,, \\ y: &\qquad 0 &= N - F_G \end{aligned}$$

doplníme silovým zákonem pro velikost tíhové síly $F_G = mg$, silovým zákonem pro velikost dynamické třecí síly $F_{\mathrm{t,d}} = fN$ a předepsaným vztahem pro velikost tažné síly $F = kt_0 = mgf_0$. Získáváme opět soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x: &\qquad ma &= mgf_0 - fN\,, \\ y: &\qquad 0 &= N - mg \end{aligned}$$

pro dvě neznámé: velikost tlakové síly podložky N a velikost zrychlení kostky a. Z druhé rovnice vychází

$$N = mg\,,$$

po dosazení do první rovnice pak

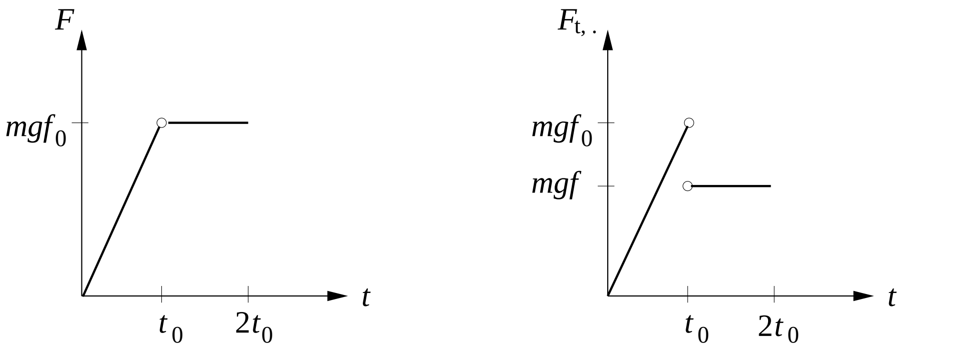
$$a = g\,(f_0 - f)\ .$$

Diskuze výsledku:
Protože mezi koeficienty statického a dynamického tření platí vztah $f_0 > f$, vychází ve shodě s očekáváním $a > 0$.

(f) S grafem závislosti velikosti tažné síly $\vec{F}$ a velikosti třecí síly[1] $\vec{F}_{\mathrm{t},\cdot}$ mezi kostkou a podložkou na čase pro $0 \le t \le 2t_0$ si již poradíme lehce (viz Obrázek 2)[2].

[1]Na místo tečky je třeba dosadit příslušný index $_{\mathrm{s}}$, resp. $_{\mathrm{d}}$.

[2]Oba grafy jsou zakresleny pro náš modelový případ — v reálných situacích neobsahují body nespojitosti ani zlomy.



Obrázek 2: Graf závislosti velikosti síly $\vec{F}$ a velikosti třecí síly $\vec{F}_{\mathrm{t},\cdot}$ na čase

Jistě jste zaznamenali, že v průběhu řešení této úlohy jsme na několika místech použili *vazebních podmínek* a že rozdíl mezi vztahy $f_0 N$ a fN, které zde vystupovaly, spočívá *nejen* ve volbě odpovídajícího koeficientu f_0, resp. f. $\diamondsuit$

Aby nezůstaly nejdůležitější závěry, k nimž jsme právě dospěli, skryty mezi řádky, zformulujeme je explicitně.

Důležité:

Zatímco vztah $F_{\mathrm{t,d}} = fN$ představuje *silový zákon* pro velikost dynamické třecí síly, analogický zápis $F_{\mathrm{t,s}}^{\max} = f_0 N$ silovým zákonem pro velikost statické třecí síly *není*: určuje pouze její *maximální přípustnou hodnotou*, tj. platí

$$0 \;\leq\; F_{\mathrm{t,s}} \;\leq\; F_{\mathrm{t,s}}^{\max} = f_0 N\,,$$

a *definuje* tak koeficient statického tření f_0. Okamžitou velikost statické třecí síly $F_{\mathrm{t,s}}$ pak (stejně jako například velikost tlakové síly podložky) určujeme z druhého Newtonova zákona doplněného o *vazební podmínky* (v našem případě vyplývá vazební podmínka $\vec{a} = 0$ ze skutečnosti, že kostka je vzhledem k podložce v klidu).

Nyní se bez obav můžeme pustit i do řešení obtížnější úlohy, jejíž zadání (různé varianty se objevují např. v [4.]) nám jistě nebude vzdálené.

Úloha 2.:

Dítě táhne po vodorovné podložce saně o hmotnosti m stálou silou $\vec{F}$, která svírá s rovinou podložky úhel α. Na saních se veze pes o hmotnosti M. Koeficient dynamického tření mezi saněmi a podložkou je f, maximální velikost statické třecí síly mezi saněmi a psem je charakterizovaná koeficientem f_0. Odpor vzduchu zanedbáváme. Určete velikost, směr a orientaci

(a) všech sil, které působí na psa,

(b) všech sil, které působí na sáňky

za předpokladu, že pes je vzhledem k saním v klidu. S jakým zrychlením se pes spolu se saněmi pohybuje?

Řešení:

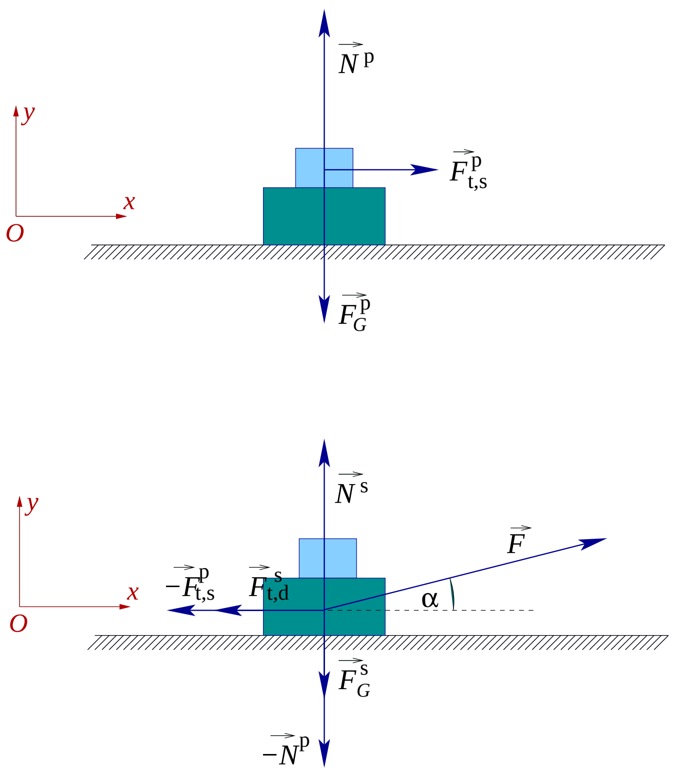
Úlohu budeme řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí.

(a) Na psa působí tíhová síla Země $\vec{F}_G^{\mathrm{p}}$, tlaková síla saní $\vec{N}^{\mathrm{p}}$ a statická třecí síla $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}}$ (pes je vzhledem k saním v klidu). Pes se vzhledem k Zemi pohybuje se stejným zrychlením jako saně (vazební podmínka), druhý Newtonův zákon pro psa má tedy tvar

$$M\vec{a} = \vec{F}_G^{\mathrm{p}} + \vec{N}^{\mathrm{p}} + \vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}}\,.$$

Protože jsou první dvě síly svislé, je statická třecí síla $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}}$ *souhlasně rovnoběžná s vektorem zrychlení* $\vec{a}$ psa (viz první část Obrázku 3). V soustavě souřadnic Oxy s osou x vodorovnou a orientovanou souhlasně se společným zrychlením saní a psa a osou y orientovanou svisle vzhůru jsou složky jednotlivých vektorů vystupujících v druhém Newtonově zákoně

$$\vec{F}_G^{\mathrm{p}} = (0, -F_G^{\mathrm{p}}) \;, \qquad \vec{N}^{\mathrm{p}} = (0, N^{\mathrm{p}}) \;, \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} = \left(F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}}, 0\right) \;, \qquad \vec{a} = (a, 0) \;,$$



Obrázek 3: Silové diagramy pro psa a pro saně

tj.

$$\begin{aligned} x: \qquad Ma &= F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} \,, \\ y: \qquad 0 &= N^{\mathrm{p}} - F_G^{\mathrm{p}} \,. \end{aligned}$$

Po dosazení silového zákona $F_G^{\mathrm{p}} = Mg$ dostáváme výsledky

$$F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} = Ma \,, \qquad N^{\mathrm{p}} = Mg \,.$$

(b) Na saně působí dítě silou $\vec{F}$, Země tíhovou silou $\vec{F}_G^{\mathrm{s}}$, podložka pak tlakovou silou $\vec{N}^{\mathrm{s}}$ a dynamickou třecí silou $\vec{F}_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{s}}$. Nesmíme ale zapomenout na to, že když saně působí na psa (část **(a)**), působí podle třetího Newtonova zákona i pes na saně, a to tlakovou silou $-\vec{N}^{\mathrm{p}}$ a statickou třecí silou $-\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}}$ (viz druhá část Obrázku 3). Druhý Newtonův zákon pro saně je tedy

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_G^{\mathrm{s}} + \vec{N}^{\mathrm{s}} + \vec{F}_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{s}} - \vec{N}^{\mathrm{p}} - \vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} \,.$$

Jednotlivé vektory mají v již zavedené soustavě souřadnic složky

$$\vec{F} = (F\cos\alpha, F\sin\alpha) \;, \qquad \vec{F}_G^{\mathrm{s}} = (0, -F_G^{\mathrm{s}}) \;, \qquad \vec{N}^{\mathrm{s}} = (0, N^{\mathrm{s}}) \;, \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{s}} = \left(-F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{s}}, 0\right) \;,$$

$$-\vec{N}^{\mathrm{p}} = (0, -N^{\mathrm{p}}) \;, \qquad -\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} = \left(-F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}}, 0\right) \;, \qquad \vec{a} = (a, 0) \;,$$

tj.

$$\begin{aligned} x: \qquad ma &= F\cos\alpha - F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{s}} - F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} \,, \\ y: \qquad 0 &= F\sin\alpha - F_G^{\mathrm{s}} + N^{\mathrm{s}} - N^{\mathrm{p}} \,. \end{aligned}$$

Přihlédnutím k silovým zákonům $F_G^{\mathrm{s}} = mg$ a $F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{s}} = fN^{\mathrm{s}}$ a k výsledkům z části **(a)** $F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{p}} = Ma$, $N^{\mathrm{p}} = Mg$, získáváme soustavu dvou rovnic pro dvě neznáme N^{s} a a

$$\begin{aligned} x: \qquad ma &= F\cos\alpha - fN^{\mathrm{s}} - Ma \,, \\ y: \qquad 0 &= F\sin\alpha - mg + N^{\mathrm{s}} - Mg \,. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vychází

$$N^{\mathrm{s}} = (m + M)\,g - F\sin\alpha \,,$$

po dosazení do první pak

$$a = \frac{F\cos\alpha - f\left[(m+M)\,g - F\sin\alpha\right]}{m+M} \,.$$

Diskuze výsledků:
Ze vztahu pro velikost tlakové síly podložky N^{s} je zřejmé, že zadání úlohy dává smysl pouze pro hodnoty veličin m, M, F a α splňující podmínku

$$N^{\mathrm{s}} = (m+M)\,g - F\sin\alpha \geq 0\,.$$

Ze vztahu pro velikost zrychlení pak plyne další podmínka kladená na tyto veličiny

$$a = \frac{F\cos\alpha - f\,[(m+M)\,g - F\sin\alpha]}{m+M} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\cos\alpha - f\,[(m+M)\,g - F\sin\alpha] \geq 0\,.$$

Poznámka 1:
Pokud by bylo úkolem určit pouze společné zrychlení saní a psa, stačilo by ztotožnit dvojici "sáně+pes" s jediným hmotným bodem o hmotnosti $(m+M)$ a postupovat stejně jako v ***Úloze 2. Nástrahy druhé***.

Poznámka 2:
Jistě jste si všimli, že sílu, jíž působí podložka na těleso, důsledně nazýváme *tlakovou silou podložky* a ne *reakcí podložky*, jak někdy vídáme v učebnicích ([1.]). Pojem *reakce podložky* totiž může podporovat nesprávný (a ne zcela ojedinělý) dojem, že tíhová síla a tlaková síla podložky jsou silami akce a reakce. (Proč tomu tak není?) ♢

Do třetice si všimněme pohybu, jehož realizaci si lze bez přítomnosti tření jen stěží představit.

Úloha 3.:
Jistě si vzpomenete, na jakém kole jezdí Večerníček. Určete směr a orientaci třecí síly, jíž na toto kolo působí vodorovná podložka. Jaký směr má třecí síla?

Řešení:
Označme $\vec{a}$ zrychlení soustavy "kolo+Večerníček" vzhledem k Zemi. Zanedbáme-li odpor vzduchu, působí na ni tíhová síla, tlaková síla podložky a *statická* třecí síla (přirozeně totiž předpokládáme, že kolo *nepodkluzuje*). První dvě jmenované síly jsou svislé, proto musí mít třecí síla *směr zrychlení soustavy*. To ale znamená, že pokud se například kolo rozjíždí po přímé trati (tj. nezatáčí), moment třecí síly otáčivý pohyb kola *brzdí*! Nenechte se však zmást a přemýšlejte: Co musí dělat Večerníček pro to, aby se skutečně rozjel? ♢

Závěrečná poznámka:
Silový zákon pro velikost dynamické třecí síly i vztah pro maximální přípustnou hodnotu statické třecí síly má *makroskopický charakter* a lze jej získat zobecněním výsledků řady experimentů. Mikroskopická interpretace obou vztahů je stručně popsána např. v [4.]

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Jakou podmínku musí splňovat velikost síly $\vec{F}$, aby se pes z ***Úlohy 2.*** vzhledem k saním skutečně nepohyboval? Jakým směrem se dá pes vzhledem k saním do pohybu, nebude-li odvozená podmínka splněna? (Kriticky posuďte, do jaké míry je tato modelová situace reálná.) S jakým zrychlením se pak vzhledem k Zemi pohybuje pes a s jakým saně?

2. Znovu vyřešte ***Úlohu 3.*** a ***Úlohu 4.*** ze str. 5. ***Nástrahy druhé***.

3. Jaký je směr a orientace třecí síly, jíž působí podložka na kolo, rozjíždí-li se Večerníček pro zakřivené trajektorii? (Srv. též s ***Nástrahou čtvrtou***).

4. Vyjmenujte a zakreslete všechny síly (včetně působišť), které působí na klasické jízdní kolo rozjíždějící se/brzdící na přímé vodorovné trajektorii (k této úloze se ještě vrátíme v ***Nástraze desáté***). Jaká je výslednice těchto sil?

5. Ke svislé stěně přiložíme hranol o hmotnosti m a působíme na něj vodorovnou silou $\vec{F}$. Co lze říci o koeficientu statického tření mezi styčnými plochami, je-li hranol vzhledem ke stěně v klidu?

6. Vysvětlete, proč se člověk v pletených rukavicích musí v tramvaji držet pevněji než člověk bez rukavic.

7. Uveďte a podrobně prodiskutujte příklady z běžného života, v nichž hrají třecí síly klíčovou roli.

8. Lze souhlasit s tím, že "třecí síly působí vždy proti pohybu tělesa"? Podrobně vysvětlete.

****

Příbuzné texty:

- ***Hlavní text***
- ***Nástraha první***
  Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- ***Nástraha druhá***
  Vektory, průměty, složky, velikosti, ... aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- ***Nástraha čtvrtá***
  Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?
- ***Nástraha pátá***
  Výtahy, vlaky, kolotoče, ... aneb Co náš čeká v neinerciálních soustavách?
- ***Nástraha šestá***
  Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa
- ***Nástraha sedmá***
  Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- ***Nástraha osmá***
  Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- ***Nástraha devátá***
  Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce
- ***Nástraha desátá — bonusová***
  Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"