Nástraha desátá — bonusová
Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"

Jak název závěrečného dílu ***Nástrah*** napovídá, následující řádky nepřinesou nic z toho, co bychom dosud nevěděli: na ta nejtypičtější úskalí, která nás v různých oblastech mechaniky a molekulové fyziky mohou potkat, jsme si totiž posvítili již dříve. Při tom jsme se snažili počínat si velmi "opatrně", jednotlivá úskalí jsme proto odkrývali jednak *postupně*, ale hlavně prostřednictvím *jednoduchých úloh*, na kterých tak mohla dostatečně vyniknout. Nyní jsme připraveni pustit se i do řešení úloh obtížnějších, někdy označovaných jako úlohy "s hvězdičkou". V nich se budou získané poznatky někdy i překvapivým způsobem prolínat, což povede k jejich upevnění, vzájemnému propojení a tím ke získání patřičného nadhledu nad celou problematikou. Není však třeba obávat se předem — nic není tak neschůdné, jak se může na první (a někdy i na druhý) pohled zdát. Na několika různorodých úlohách se přesvědčíme, že pokud řešení zahájíme důkladným rozborem situace (tj. ujasníme si, *co víme* a *co chceme zjistit*), zformulujeme základní vztahy, které situaci charakterizují, a připojíme k nim konkrétní dílčí závěry z předchozích ***Nástrah***, nemůžeme zabloudit.

Úloha 1.:

Částice o hmotnosti m se nachází ve výšce h_0 nad zemským povrchem. V okamžiku $t = 0$ je vržena svisle vzhůru počáteční rychlostí $\vec{v}_0$. Ve vhodně zvolené soustavě souřadnic nalezněte

(a) závislost vektoru rychlosti částice na čase (převzato z [11.]),

(b) závislost polohového vektoru částice na čase

za předpokladu, že síla odporu prostředí je přímo úměrná rychlosti částice a směřuje proti ní.

Řešení:

(a) Úlohu budeme řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí. Naším úkolem je nalézt závislost vektoru rychlosti a polohového vektoru částice na čase, jde tedy o typickou úlohu na aplikaci druhého Newtonova zákona (srv. s ***Hlavním textem***). Zformulujme jej tedy. Víme, že na částici působí dvě síly: tíhová síla Země $\vec{F}_G$ a síla odporu prostředí $\vec{F}_{\mathrm{odp}}$, tj.

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_{\mathrm{odp}}\,.$$

Vezmeme-li v úvahu definiční vztah pro zrychlení $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, silový zákon pro gravitační sílu $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a vztah pro odporovou sílu $\vec{F}_{\mathrm{odp}} = -k\vec{v}$, v němž $k > 0$ je konstanta úměrnosti, dostáváme obyčejnou lineární diferenciální rovnici pro hledanou funkci $\vec{v}\,(t)$

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - k\vec{v}\,.$$

Nyní je třeba vhodně zavést soustavu souřadnic $Oxyz$. Vzhledem k význačnosti svislého směru ji zvolme tak, že rovina Oxy splývá s povrchem Země a osa z je orientovaná svisle vzhůru. Potom platí

$$\vec{v}\,(t) = (v_x(t)\,, v_y(t)\,, v_z(t))\ , \qquad \vec{g} = (0, 0, -g)\ ,$$

z předchozí vektorové diferenciální rovnice tedy máme tři rovnice skalární, z nichž první dvě jsou homogenní a třetí je nehomogenní:

$$\begin{aligned} m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -kv_x\,, \\ m\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -kv_y\,, \\ m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= -mg-kv_z\,. \end{aligned}$$

Jejich řešení má obecný tvar [1]

$$v_x(t)=C_x\mathrm{exp}\left(-\frac{k}{m}\,t\right), \qquad v_y(t)=C_y\mathrm{exp}\left(-\frac{k}{m}\,t\right), \qquad v_z(t)=\left[C_z\mathrm{exp}\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right]-\frac{mg}{k}\,,$$

kde C_x, C_y a C_z jsou *integrační konstanty*. Určíme je z počáteční podmínky (srv. s ***Nástrahou první***)

$$\vec{v}(0)=\vec{v}_0=(0,0,v_0)\ , \qquad \text{kde} \qquad v_0=konst.>0\,,$$

která vede k výsledkům

$$C_x=C_y=0\,, \qquad C_z=v_0+\frac{mg}{k}\,,$$

dohromady tedy máme

$$v_x(t)=0\,, \qquad v_y(t)=0\,, \qquad v_z(t)=\left[\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)\cdot\mathrm{exp}\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right]-\frac{mg}{k}\,.$$

(b) Složky polohového vektoru

$$\vec{r}(t)=(r_x(t)\,,r_y(t)\,,r_z(t))$$

nalezneme již snadno (srv. s ***Hlavním textem*** a ***Nástrahou první***):

$$\begin{aligned} r_x(t) &= \int v_x(t)\,\mathrm{d}t=\int 0\,\mathrm{d}t=D_x\,, \\ r_y(t) &= \int v_y(t)\,\mathrm{d}t=\int 0\,\mathrm{d}t=D_y\,, \\ r_z(t) &= \int v_z(t)\,\mathrm{d}t=\int\left\{\left[\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)\cdot\mathrm{exp}\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right]-\frac{mg}{k}\right\}\mathrm{d}t= \\ &= -\frac{m}{k}\left[\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)\cdot\mathrm{exp}\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right]-\frac{mg}{k}\,t+D_z\,, \end{aligned}$$

kde integrační konstanty D_x, D_y a D_z určíme z počáteční podmínky. Ta má za předpokladu, že osa z prochází místem, v němž se částice v okamžiku $t=0$ nachází, tvar

$$\vec{r}(0)=(0,0,h_0)\ .$$

[1] Čtenářům, kteří nejsou v řešení diferenciálních rovnic příliš zběhlí, doporučujeme pro seznámení se se základními postupy běžně dostupné publikace [20.] a [22.].

Potom

$$D_x = D_y = 0\,, \qquad\qquad D_z = \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) + h_0\,,$$

dohromady tedy

$$r_x(t) = 0\,, \quad r_y(t) = 0\,, \quad r_z(t) = -\frac{m}{k}\left[\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\cdot \exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right)\right] - \frac{mg}{k}\,t + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) + h_0\,.$$

Diskuze výsledků:
Výpočet ukázal, že částice se pohybuje pouze ve svislém směru, což bylo možné očekávat. Ze vztahu pro závislost z-ové složky rychlosti na čase můžeme po jednoduché matematické úpravě získat tyto závěry:

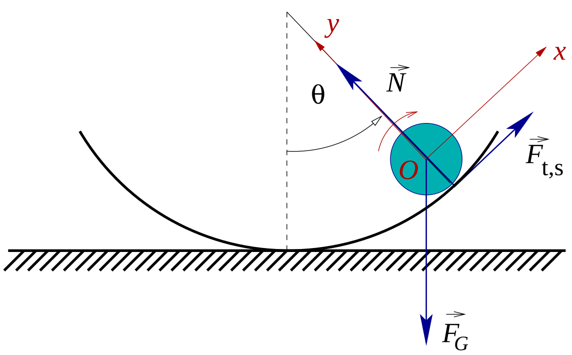
- Pro $0 \leq t < \frac{m}{k}\ln\left(\frac{v_0 k}{mg} + 1\right)$ je $v_z(t) > 0$, částice se tedy pohybuje vzhůru.
- Pro $t = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{v_0 k}{mg} + 1\right)$ platí $v_z(t) = 0$, částice je tedy v bodě obratu.
- Pro $t > \frac{m}{k}\ln\left(\frac{v_0 k}{mg} + 1\right)$ je $v_z(t) < 0$, částice tedy klesá k Zemi.
- Pro $t \to \infty$, resp. pro natolik velká t, že první člen ve vztahu pro $v_z(t)$ je proti druhému členu v rámci požadované přesnosti zanedbatelný, můžeme psát $v_z(t) \doteq -\frac{mg}{k} \equiv -v_z^{\max}$. To znamená, že pro dostatečně velká t lze pohyb částice až do okamžiku, kdy dopadne na zemský povrch, považovat za rovnoměrný přímočarý. Odpovídající rychlost částice $\vec{v}\,(t) = \left(0, 0, -\frac{mg}{k}\right) = \overrightarrow{konst.}$ se nazývá *mezní rychlostí* (jistě přijdete na to, proč právě tento název). Vztah pro z-ovou souřadnici částice je pak $r_z(t) \doteq -\frac{mg}{k}\,t + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) + {}$ $+h_0 = -v_z^{\max}\,t + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) + h_0\,.$

Poznámka:
Vyjádření odporové síly ve tvaru $\vec{F}_{\mathrm{odp}} = -k\vec{v}$ lze s dobrou přesností použít pouze pro nepříliš velké rychlosti. Při větších rychlostech lépe vyhovuje vztah, v němž je velikost odporové síly úměrná kvadrátu velikosti rychlosti. ♢

Úloha 2.:

Homogenní tuhou kouli o hmotnosti m a poloměru r umístíme do nepohyblivé misky kulového tvaru o poloměru $R > r$, nepatrně vychýlíme o úhel θ_0 a uvolníme. Určete periodu jejích kmitů. Předpokládejte, že koule v průběhu pohybu nepodkluzuje a odpor vzduchu je zanedbatelný. (Převzato z [7.] a upraveno.)

Řešení:
Úlohu budeme opět řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, a to dvěma způsoby.



Obrázek 1: Silový diagram pro kouli

1. způsob:
Naším úkolem je určit periodu malých kmitů koule. Začneme stejně jako vždy — výčtem a nákresem všech působících sil, tentokrát ovšem i s uvážením jejich působišť (vysvětlete proč). Na kouli působí v jejím těžišti tíhová síla $\vec{F}_G$, v bodě kontaktu s podložkou pak tlaková síla $\vec{N}$ a statická třecí síla $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}$. První impulzová věta pro pohyb těžiště koule má proto tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,s}}\,.$$

Složky jednotlivých vektorů, které v ní vystupují, budeme podobně jako v v ***Úloze 1. Nástrahy čtvrté*** určovat v pohyblivé pravotočivé soustavě souřadnic $Oxyz$, jejíž počátek O je ztotožněn s těžištěm koule, osa x má směr tečny k trajektorii těžiště a je orientovaná stejně jako vektor okamžité rychlosti těžiště, osa y má směr normály k trajektorii a je orientovaná do středu misky a osa z je k nim kolmá (viz Obrázek 1, který odpovídá fázi pohybu koule, při níž úhel $0 < \theta < \theta_0$ roste; osa z pro přehlednost není zakreslena). V této soustavě mají jednotlivé vektory složky

$$\vec{F}_G = (-F_G \sin\theta, F_G \cos\theta) \ , \qquad \vec{N} = (0, N) \ , \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,s}} = (F_{\mathrm{t,s}}, 0) \ , \qquad \vec{a} = (a_\tau, a_n) \ ,$$

kde a_τ označuje tečnou a a_n normálovou složku zrychlení těžiště koule. První impulzová věta zapsaná ve složkách je tedy

$$\begin{aligned} x: \qquad & m a_\tau = F_{\mathrm{t,s}} - F_G \sin\theta \,, \\ y: \qquad & m a_n = N - F_G \cos\theta \,. \end{aligned}$$

K určení periody kmitů bude sloužit první z rovnic, do níž postupně dosadíme:

- Silový zákon pro velikost tíhové síly $F_G = mg$.
- Vztah vyjadřující souvislost mezi obvodovými a úhlovými veličinami pro pohyb těžiště koule, který se děje po části kružnice o poloměru $R - r$:

  $$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (R - r)\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (R - r)\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \,.$$

  (K tomuto závěru můžete dospět také prostřednictvím vektorových vztahů mezi tečným a úhlovým zrychlením — viz ***Hlavní text***.)
- Vztah pro velikost statické třecí síly $F_{\mathrm{t,s}}$. Pro ni, jak víme z ***Nástrahy třetí***, silový zákon neexistuje. Konkrétní hodnotu velikosti statické třecí síly v poloze popsané úhlem θ určíme z druhé impulzové věty pro otáčivý pohyb kolem osy jdoucí těžištěm koule (srv. s ***Nástrahou šestou***)

  $$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{t,s}}} \,.$$

  Označíme-li $\vec{\alpha}\,(t) = (0, 0, \alpha\,(t))$ úhel, o který se koule za dobu t otočila kolem vodorovné osy procházející těžištěm, přechází poslední rovnice (s ohledem na směr pohybu koule, o němž na Obrázku 1 uvažujeme) do skalárního tvaru

  $$J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = rF_{\mathrm{t,s}} \,.$$

  Mezi obvodovými a úhlovými veličinami, které vyjadřují pohyb těžiště koule na straně jedné a otáčení koule kolem její osy procházející těžištěm na straně druhé, platí

  $$-r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = v = (R - r)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{R - r}{r}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{R - r}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \,.$$

  Dosadíme-li tento výsledek spolu s momentem setrvačnosti koule kolem osy procházející těžištěm $J = \frac{2}{5}mr^2$ do skalárního zápisu druhé impulzové věty, dostáváme vztah pro velikost statické třecí síly

  $$F_{\mathrm{t,s}} = -\frac{2}{5}m\,(R - r)\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \,.$$

  Všimněme si, že velikost statické třecí síly je skutečně *nezáporná*, neboť při uvažovaném směru pohybu koule platí $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} < 0$. (Podrobně si rozmyslete, jak je to se směry jednotlivých vektorů a se znaménky, které vystupují v předchozích vztazích.)

Po dosazení všech dílčích výsledků do první rovnice na předchozí straně dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\sin\theta = 0$$

a pro předpokládané malé kmity, kdy $\sin\theta \approx \theta$, potom

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\,\theta = 0\,.$$

Obecné řešení této rovnice má tvar

$$\theta(t) = A\sin(\Omega\, t) + B\cos(\Omega\, t)\ ,$$

kde A a B jsou integrační konstanty a

$$\Omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}}$$

je úhlová frekvence, která souvisí s periodou kmitů vztahem

$$\Omega = \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{T} = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}\,.$$

I když to zadání nepožaduje, určíme pro úplnost ještě integrační konstanty A a B ve vztahu pro $\theta(t)$. Zadání předpokládá, že v okamžiku $t=0$ kouli uvolníme v poloze popsané úhlem θ_0, tj. úhlová rychlost koule je v počátečním okamžiku nulová. Platí tedy

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= A\sin(\Omega\, t) + B\cos(\Omega\, t)\ , \qquad \text{tj.} \qquad \theta(0) = B = \theta_0\,,\\
\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} &= A\Omega\cos(\Omega\, t) - B\Omega\sin(\Omega\, t)\ , \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta(0)}{\mathrm{d}t} = A\Omega = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0\,,
\end{aligned}$$

dohromady potom

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega\, t)\ .$$

2. způsob

Druhý způsob řešení této úlohy je na první pohled zcela odlišný. Vzhledem k tomu, že zanedbáváme odpor vzduchu a předpokládáme, že koule nepodkluzuje, tj. žádná část její mechanické energie se nemění v energii vnitřní, platí pro pohyb koule zákon zachování mechanické energie

$$mgh_\theta + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega_{\mathrm{rot}}^2 = konst.,$$

kde ω_{rot} je úhlová rychlost otáčivého pohybu koule kolem její osy a h_θ je vzdálenost těžiště koule od předem dané roviny. Vezmeme-li za tuto rovinou vodorovnou rovinu procházející těžištěm koule v poloze $\theta = 0$, odvodíme podobně jako v ***Úloze 1. Nástrahy čtvrté***

$$h_\theta = (R-r)(1-\cos\theta)\ .$$

Protože dále platí $v = (R-r)\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|$, $\omega_{\mathrm{rot}} = \frac{v}{r} = \frac{R-r}{r}\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|$ a $J = \frac{2}{5}mr^2$, dostáváme po úpravách vztah

$$mg(R-r) - mg(R-r)\cos\theta + \frac{7}{10}m(R-r)^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = konst.$$

Jeho derivací podle času máme

$$mg\,(R-r)\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{7}{10}m\,(R-r)^2\,2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=m\,(R-r)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left[g\sin\theta+\frac{7}{5}\,(R-r)\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right]=0$$

a odtud

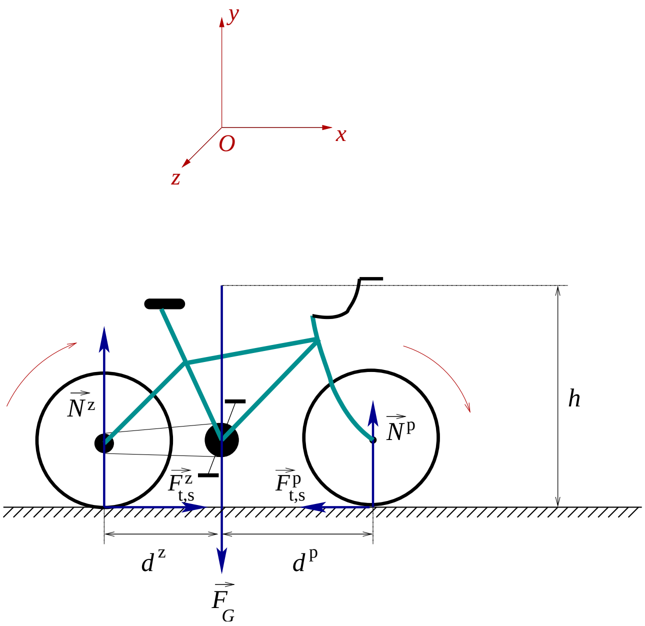
$$g\sin\theta+\frac{7}{5}\,(R-r)\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=0\,,\qquad \text{tj.}\qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{5}{7}\,\frac{g}{R-r}\,\sin\theta=0\,,$$

což je rovnice, kterou jsme získali a řešili výše.

Poznámka:
V zadání této úlohy jsme předpokládali, že odpor vzduchu je zanedbatelný. Kdyby tomu tak nebylo, museli bychom vyjádřit odporové síly působící na jednotlivé elementy koule, které se vzhledem k Zemi pohybují *různými rychlostmi* (vysvětlete), a rovněž momenty těchto sil vzhledem k ose otáčení, což by bylo obtížně proveditelné. Zájemce o detailní rozbor jednodušší, avšak důležité situace — kmitavého pohybu *částice* s uvážením odporu prostředí (tzv. *tlumené kmitání*) — odkazujeme na [7.]. ♢

Úloha 3.:

Cyklista se rozjíždí přímočaře po vodorovné silnici tak, že zadní kolo šlapáním pohání konstantním momentem sil o velikosti M^{z}. Určete velikosti všech sil, které na soustavu "kolo+cyklista" o celkové hmotnosti m působí, a velikost zrychlení těžiště této soustavy vzhledem k Zemi. Předpokládejte, že kola při rozjezdu nepodkluzují a odpor vzduchu je zanedbatelný.



Obrázek 2: Silový diagram pro soustavu "kolo+cyklista"

Řešení:

Na soustavu "kolo+cyklista" působí v těžišti tíhová síla $\vec{F}_G$, na zadní kolo v místě kontaktu se silnicí tlaková síla $\vec{N}^{\mathrm{z}}$ a statická třecí síla $\vec{F}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}$, na přední kolo pak tlaková síla $\vec{N}^{\mathrm{p}}$ a statická třecí síla $\vec{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}$. Tato síla je současně jedinou silou, která má vzhledem k ose otáčení předního kola nenulový moment ("roztáčí" jej), proto musí být opačně orientovaná než okamžité zrychlení soustavy. A jelikož zrychlení soustavy má stejný směr i orientaci jako výslednice sil, nezbude, než aby síla $\vec{F}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}$ měla opačnou orientaci než síla $\vec{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}$ a současně platilo $F^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}>F^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}$. Situace je schematicky znázorněna na Obrázku 2.

Naším úkolem je určit velikosti sil a zrychlení soustavy, začneme proto s impulzovými větami. První impulzová věta pro pohyb těžiště soustavy "cyklista+kolo" má tvar

$$m\vec{a}=\vec{F}_G+\vec{N}^{\mathrm{z}}+\vec{F}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}+\vec{N}^{\mathrm{p}}+\vec{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}\,,$$

v soustavě souřadnic $Oxyz$ zvolené tak, že osa x je vodorovná a souhlasně orientovaná se zrychlením soustavy, osa y směřuje svisle vzhůru a osa z je k nim kolmá potom

$$
\begin{aligned}
x: & \qquad ma = F^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}} - F^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}\,, \\
y: & \qquad 0 = N^{\mathrm{z}} + N^{\mathrm{p}} - F_G\,, \qquad \text{resp.} \qquad 0 = N^{\mathrm{z}} + N^{\mathrm{p}} - mg\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme za velikost tíhové síly dosadili $F_G = mg$. Druhá impulzová věta formulovaná v těžišťové soustavě (viz ***Hlavní text***) má tvar

$$\vec{0} = \vec{M}_{\vec{N}^{\mathrm{z}}} + \vec{M}_{\vec{F}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}} + \vec{M}_{\vec{N}^{\mathrm{p}}} + \vec{M}_{\vec{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}}\,,$$

to proto, že jsou-li obě kola v kontaktu se silnicí, je úhlové zrychlení soustavy "cyklista+kolo" vzhledem k těžišťové soustavě nulové. Z této vektorové rovnice získáme jedinou rovnici skalární,

$$0 = -d^{\mathrm{z}} N^{\mathrm{z}} + hF^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}} + d^{\mathrm{p}} N^{\mathrm{p}} - hF^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}\,,$$

v níž význam použitých symbolů je patrný z Obrázku 2. Zatím máme tři skalární rovnice pro pět neznámých N^{z}, $F^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}$, N^{p}, $F^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}$ a a, potřebujeme tedy ještě dvě rovnice. Ani s těmi nebude problém — stačí zformulovat druhou impulzovou větu pro otáčení zadního a předního kola. Zapišme je s využitím předpokladu, že kola nepodkluzují, rovnou ve skalárním tvaru

$$
\begin{aligned}
J\varepsilon &= J\,\frac{a}{r} = M^{\mathrm{z}} - rF^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}}\,, \\
J\varepsilon &= J\,\frac{a}{r} = rF^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}}\,,
\end{aligned}
$$

kde J je moment setrvačnosti kol (pro jednoduchost je považujeme za stejná) a r je jejich poloměr. Řešením získané pětice rovnic dostáváme

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{rM^{\mathrm{z}}}{2J + mr^2}\,, \\
F^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}} &= \frac{M^{\mathrm{z}}}{r}\left(1 - \frac{J}{2J + mr^2}\right)\,, \\
F^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}} &= \frac{JM^{\mathrm{z}}}{r\,(2J + mr^2)}\,, \\
N^{\mathrm{z}} &= \frac{m}{d^{\mathrm{z}} + d^{\mathrm{p}}}\,(d^{\mathrm{p}} g + ha) = \frac{m}{d^{\mathrm{z}} + d^{\mathrm{p}}}\left(d^{\mathrm{p}} g + h\,\frac{rM^{\mathrm{z}}}{2J + mr^2}\right)\,, \\
N^{\mathrm{p}} &= \frac{m}{d^{\mathrm{z}} + d^{\mathrm{p}}}\,(d^{\mathrm{z}} g - ha) = \frac{m}{d^{\mathrm{z}} + d^{\mathrm{p}}}\left(d^{\mathrm{z}} g - h\,\frac{rM^{\mathrm{z}}}{2J + mr^2}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Diskuze výsledků:
Výsledky potvrzují zkušenost známou všem cyklistům: při rozjezdu (tj. $a > 0$) má tlaková síla $\vec{N}^{\mathrm{z}}$ působící na zadní kolo větší velikost, než když bicykl stojí (tj. $a = 0$).

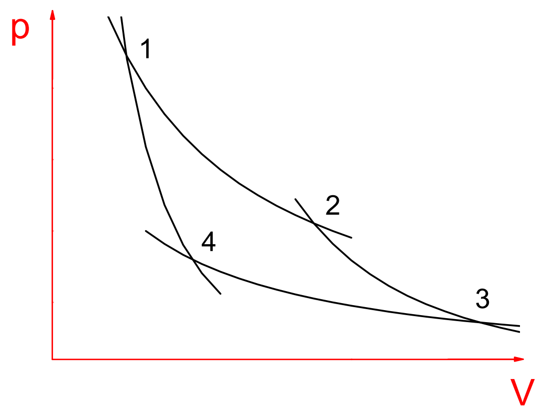
Připomeňme ještě, že pokud při rozjezdu nemají kola podkluzovat, musí platit

$$F^{\mathrm{z}}_{\mathrm{t,s}} \le F^{\mathrm{z,max}}_{\mathrm{t,s}} = f_0 N^{\mathrm{z}} \qquad \text{a} \qquad F^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}} \le F^{\mathrm{p,max}}_{\mathrm{t,s}} = f_0 N^{\mathrm{p}}\,,$$

kde f_0 je koeficient statického tření mezi koly a silnicí. ♢

Úloha 4.:

Vypočtěte účinnost vratného Carnotova cyklu, jehož pracovní látkou je ideální plyn.



Obrázek 3: pV-diagram pro vratný Carnotův cyklus

Řešení:

Vratný Carnotův cyklus sestává z izotermy $1 \to 2$ probíhající při termodynamické teplotě T_1, z adiabaty $2 \to 3$, z izotermy $3 \to 4$ probíhající při termodynamické teplotě T_2 a z adiabaty $4 \to 1$. Zřejmě platí $T_1 > T_2$ (zdůvodněte). Účinnost tepelného cyklu je definovaná vztahem

$$\eta = \frac{Q_{\rm dod} - Q_{\rm od}}{Q_{\rm dod}} = \frac{W}{Q_{\rm dod}} \,,$$

kde $Q_{\rm dod}$ je teplo přijaté v průběhu cyklu pracovní látkou od okolí, $Q_{\rm od}$ je teplo předané pracovní látkou okolí a W je práce vykonaná pracovní látkou. První krok ke stanovení účinnosti tedy spočívá ve vypočtu tepel, která pracovní látka při jednotlivých dějích přijme, a práce, kterou při tom vykoná (viz ***Nástraha devátá***)[2].

- *Izotermický děj $1 \to 2$:*
  Při izotermickém ději se vnitřní energie ideálního plynu nemění, z první věty termodynamické tedy dostáváme užitím stavové rovnice

$$\begin{aligned} \delta Q_{1\to2} &= \delta W_{1\to2} = p\,\mathrm{d}V = \frac{nR_mT_1}{V}\,\mathrm{d}V \qquad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \qquad \Delta Q_{1\to2} &= \Delta W_{1\to2} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR_mT_1}{V}\,\mathrm{d}V = nR_mT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0\,. \end{aligned}$$

- *Adiabatický děj $2 \to 3$:*
  Při adiabatickém ději si pracovní látka nevyměňuje s okolím teplo, tj.

$$\delta Q_{2\to3} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta Q_{2\to3} = 0\,,$$

  proto máme užitím první věty termodynamické

$$\mathrm{d}E_{2\to3} = C_V\mathrm{d}T = -\delta W_{2\to3} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta W_{2\to3} = -C_V\,(T_2 - T_1) = C_V\,(T_1 - T_2) > 0\,.$$

- *Izotermický děj $3 \to 4$:*
  Podobně jako při izotermickém ději $1 \to 2$ dostáváme

$$\begin{aligned} \delta Q_{3\to4} &= \delta W_{3\to4} = p\,\mathrm{d}V = \frac{nR_mT_2}{V}\,\mathrm{d}V \qquad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \qquad \Delta Q_{3\to4} &= \Delta W_{3\to4} = \int_{V_4}^{V_3} \frac{nR_mT_2}{V}\,\mathrm{d}V = nR_mT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} < 0\,. \end{aligned}$$

[2] Jiný způsob odvození vztahu pro účinnost vratného Carnotova cyklu, který využívá vztahů pro entropii, lze nalézt např. v [5.]).

- *Adiabatický děj* $4 \to 1$:
  Podobně jako při adiabatickém ději $4 \to 1$ dostáváme
  $$\delta Q_{4\to 1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta Q_{4\to 1} = 0$$
  a užitím první věty termodynamické
  $$\mathrm{d}E_{4\to 1} = C_V \mathrm{d}T = -\delta W_{4\to 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta W_{4\to 1} = -C_V\,(T_1 - T_2) = C_V\,(T_2 - T_1) < 0\,.$$

Pro účinnost Carnotova cyklu pak platí

$$\begin{aligned}\eta = \frac{W}{Q_{\mathrm{dod}}} &= \frac{\Delta W_{1\to 2} + \Delta W_{2\to 3} + \Delta W_{3\to 4} + \Delta W_{4\to 1}}{\Delta Q_{1\to 2}} = \frac{nR_m T_1\,\ln\frac{V_2}{V_1} + nR_m T_2\,\ln\frac{V_4}{V_3}}{nR_m T_1\,\ln\frac{V_2}{V_1}} = \\ &= \frac{T_1\,\ln\frac{V_2}{V_1} + T_2\,\ln\frac{V_4}{V_3}}{T_1\,\ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1\,\ln\frac{V_2}{V_1} - T_2\,\ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1\,\ln\frac{V_2}{V_1}}\,.\end{aligned}$$

Nyní budeme tento vztah upravovat tak, abychom jej vyjádřili pouze prostřednictvím veličin T_1 a T_2, které Carnotův cyklus charakterizují. Vyjdeme ze vztahu pro adiabatický děj

$$pV^\gamma = konst.,$$

který užitím stavové rovnice převedeme do tvaru (proveďte)

$$TV^{\gamma-1} = Konst.$$

Pro adiabatické děje $2 \to 3$ a $4 \to 1$ tedy platí rovnice

$$\begin{aligned} T_1 V_2^{\gamma-1} &= T_2 V_3^{\gamma-1}\,, \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_4^{\gamma-1}\,, \end{aligned}$$

jejichž podělením dostáváme

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

a po dosazení do vztahu pro účinnost nakonec

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1\,.$$

Poznámka:
Tepelné stroje mohou pracovat s několika ohřívači a s několika chladiči. Lze ukázat (přesahuje to však záměr i rozsah tohoto textu), že účinnost vratného cyklu nikdy nemůže překročit hodnotu

$$\frac{T_{\mathrm{oh}} - T_{\mathrm{chl}}}{T_{\mathrm{oh}}}\,,$$

kde T_{oh} je nejvyšší z termodynamických teplot ohřívačů a T_{chl} je nejnižší z termodynamických teplot chladičů, tj.

$$\eta \le \eta^{\max} = \frac{T_{\mathrm{oh}} - T_{\mathrm{chl}}}{T_{\mathrm{oh}}}\,. \qquad \diamondsuit$$

Úloha 5.:
Odvoďte stavovou rovnici ideálního plynu.

Řešení:

Víme, že tlak plynu je dán neustálými nárazy jeho částic na stěny nádoby, která jej obklopuje. Matematicky je určen podílem velikosti kolmého průmětu síly, jíž působí částice na danou plochu, a velikosti této plochy, tj.

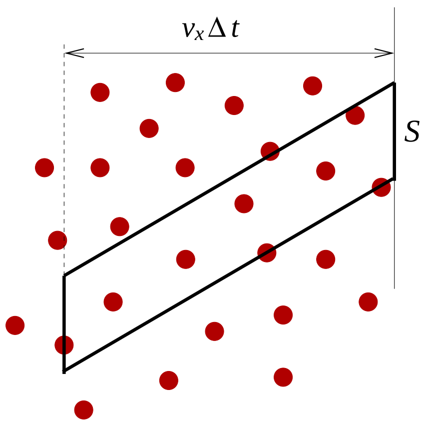
$$p = \frac{F}{S}\,.$$

Velikost kolmého průmětu síly, jíž působí částice na plochu, je podle třetího Newtonova zákona stejně velká jako velikost kolmého průmětu síly, jíž působí plocha na částice. Určíme ji z druhého Newtonova zákona, který rovnou zapíšeme ve skalárním tvaru

$$F = \frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta t}\,,$$

v němž $\Delta\mathcal{P}$ je velikost kolmého průmětu změny hybnosti částic, k níž došlo za dobu Δt. (Velikost hybnosti tentokrát označujeme kaligrafickým písmenem $\mathcal{P}$, aby nedošlo k záměně s tlakem plynu označeným jako p.) Naším cílem je tedy odvodit vztah pro $\Delta\mathcal{P}$. Pro tento účel zvolme soustavu souřadnic $Oxyz$ tak, že osa x je kolmá na danou plochu a je orientovaná ven z nádoby. Uvažujme nejprve o jediné částici s hmotnosti m, která se pohybuje rychlostí ležící v infinitezimálním intervalu $[\vec{v}, \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}] \equiv [v_x, v_x + \mathrm{d}v_x] \times [v_y, v_y + \mathrm{d}v_y] \times [v_z, v_z + \mathrm{d}v_z]$ a která se od stěny pružně odráží. Vektor změny její hybnosti je kolmý na plochu (vysvětlete) a jeho velikost je (srv. s ***Nástrahou sedmou***, str. 7)

$$\Delta\mathcal{P}_{[\vec{v},\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}]} = 2mv_x\,.$$



Obrázek 4: K odvození stavové rovnice ideálního plynu

Jaký je počet částic s touto rychlostí, které za dobu Δt na vybranou plochu narazí? Ten určíme užitím pravděpodobností, s nimiž jsme se seznámili v ***Nástraze deváté***. Nejprve si ale uvědomme, že částice s rychlostmi v intervalu $[\vec{v}, \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}]$, které za dobu Δt narazí na vybranou plochu, se nacházejí v kosém válci o podstavě S a výšce rovné $v_x\Delta t$, tedy maximální vzdálenosti částice s danou rychlostí, která za dobu Δt právě k ploše dospěje (viz Obrázek 4). V tomto válci je celkem

$$\frac{N}{V}\,Sv_x\Delta t$$

částic, kde N je počet částic v celé nádobě o objemu V, ale pouze

$$\mathrm{d}N_{[\vec{v},\vec{v}+\mathrm{d}v]} = \left(\frac{N}{V}\,Sv_x\Delta t\right)\varrho\left(v_x\right)\varrho\left(v_y\right)\varrho\left(v_z\right)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$$

z nich má rychlost v uvažovaném intervalu $[\vec{v}, \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}]$. Velikost hybnosti, kterou tyto částice předají ploše, je potom

$$\Delta\mathcal{P}_{[\vec{v},\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}]}\,\mathrm{d}N_{[\vec{v},\vec{v}+\mathrm{d}v]} = 2m\left(\frac{N}{V}\,Sv_x^2\Delta t\right)\varrho\left(v_x\right)\varrho\left(v_y\right)\varrho\left(v_z\right)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\,.$$

Zatím jsme uvažovali o částicích, jejichž rychlost leží v infinitezimálním intervalu $[\vec{v}, \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}]$. Velikost hybnosti předanou *všemi* částicemi určíme integrací posledního vztahu. Je zřejmé, že $x-$ová složka rychlosti částice, která naráží na plochu, musí být *nezáporná*, zatímco ostatní dvě složky mohou být *libovolné*, tj.

$$\Delta\mathcal{P} = 2m\left(\frac{N}{V}\,S\Delta t\right)\int_0^{\infty} v_x^2\varrho\left(v_x\right)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\varrho\left(v_y\right)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\varrho\left(v_z\right)\mathrm{d}v_z\,.$$

Druhý integrál určuje pravděpodobnost, že y-ová složka rychlosti částice je libovolná, vyjadřuje tedy pravděpodobnost jistého jevu, proto je výsledek integrace roven jedné. Stejně je tomu i s třetím integrálem. Prvního integrálu si všimneme podrobněji. Platí (viz ***Nástraha devátá***, ***Otázka 12.***)

$$\int_0^{\infty} v_x^2\varrho\left(v_x\right)\mathrm{d}v_x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\varrho\left(v_x\right)\mathrm{d}v_x = \frac{1}{2}\left\langle v_x^2\right\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{kT}{m}\,.$$

Po dosazení výsledku

$$\Delta\mathcal{P} = \frac{N}{V}\,SkT\Delta t$$

do druhého a nakonec do prvního vztahu této úlohy dostáváme

$$pV = NkT\,,$$

což je známá stavová rovnice ideálního plynu. ◊

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Vyřešte ***Úlohu 1.*** za předpokladu, že

- **(a)** vektor počáteční rychlostí částice svírá s vodorovnou rovinou úhel α,
- **(b)** velikost odporové síly je úměrná kvadrátu velikosti rychlosti částice.

2. Odvoďte vztah pro závislost velikosti tlakové síly podložky na poloze koule z ***Úlohy 2.***

3. Kulička o poloměru r a hmotnosti m se bez klouzání valí z nejvyššího bodu nakloněné roviny ležícího ve výšce $h \gg r$ nad vodorovnou rovinou. Nakloněná rovina je zakončena smyčkovou dráhou o poloměru R ležící ve svislé rovině. Vypočtěte velikost svislé i vodorovné síly, jimiž působí smyčka na kuličku při průchodu bodem ležícím ve výšce R nad vodorovnou podložkou. Zformulujte rovněž podmínku, kterou musí zadané veličiny splňovat, aby kulička prošla nejvyšším bodem smyčky. Odpor vzduchu zanedbejte. (Převzato z [6.].)

Návod: Uvědomte si, že vodorovná síla je silou dostředivou (velikost rychlosti těžiště kuličky určíte ze zákona zachování mechanické energie). Svislou silou je statická třecí síla (jakou má orientaci, víte-li, že pohyb kuličky je (nerovnoměrně) zpomalený?). K jejímu určení zformulujte první a druhou impulzovou větu pro pohyb kuličky.

4. Obruč o poloměru r se kutálí z vrcholu nepohyblivého válce o poloměru $R > r$, kde byla původně v klidu. Ve kterém místě začne klouzat, víte-li že koeficient statického tření mezi obručí a válcem je f_0? Odpor vzduchu zanedbejte. (Převzato z [11.].)

Návod: Zformulujte první a druhou impulzovou větu pro pohyb obruče. Uvědomte si, že výslednice průmětu tíhové síly do směru kolmého k povrchu válce a tlakové síly válce je silou dostředivou (rychlost těžiště obruče určíte ze zákona zachování mechanické energie). Dále zapište vztah pro maximální přípustnou velikost statické třecí síly mezi povrchem válce a obručí.

5. Odvoďte vztah pro periodu malých kmitů *fyzického kyvadla*, tj. tuhého tělesa, které se otáčí kolem vodorovné osy, která neprochází jeho těžištěm. Určete rovněž závislost síly, jíž působí kyvadlo na osu, na čase.

Návod: Periodu malých kmitů kyvadla určíte formulací druhé impulzové věty, resp. jejího speciálního případu pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy. Síla, jíž působí kyvadlo na osu, je stejně velká, ale opačně orientovaná než síla, kterou působí osa na kyvadlo. Tu určíte z první impulzové věty pro pohyb těžiště kyvadla, rozepsané do směru tečny a do směru normály k trajektorii těžiště.

6. Vyřešte ***Úlohu 3.*** za předpokladu, že cyklista se rozjíždí do kopce s úhlem sklonu α.

7. Cyklista pohybující se přímočaře po vodorovné silnici začne v určitém okamžiku brzdit. Určete velikosti všech sil, které na soustavu "kolo+cyklista" o celkové hmotnosti m působí, a velikost zrychlení těžiště této soustavy vzhledem k Zemi, jestliže

(a) cyklista brzdí jen zadní brzdou, přičemž velikost brzdného momentu je M^{z},

(b) cyklista brzdí jen přední brzdou, přičemž velikost brzdného momentu je M^{p},

(c) cyklista brzdí přední i zadní brzdou, přičemž velikosti brzdných momentů jsou M^{z} a M^{p}.

Předpokládejte, že kola nepodkluzují a odpor vzduchu je zanedbatelný.

8. Vypočtěte účinnost tepelného cyklu s ideálním plynem, který je složen ze dvou izoterem a dvou izochor. Dány jsou teploty T_1, T_2, objemy V_1, V_2 a Poissonova konstanta γ. (Převzato z [11.].)

Návod: K vyjádření tepelné kapacity C_V použijte Mayerova vztahu (viz ***Nástraha devátá***)

$$C_p = C_V + nR_m\,.$$

Podělením obou jeho stran veličinou C_V dostanete

$$\frac{C_p}{C_V} = \gamma = 1 + \frac{nR_m}{C_V} \qquad \Longrightarrow \qquad C_V = \frac{nR_m}{\gamma - 1}\,.$$

9. Cyklus, jehož pracovní látkou je ideální plyn, se skládá z

(a) izochory, adiabaty a izotermy,

(b) izobary, adiabaty a izotermy.

Izotermický proces probíhá v obou případech při minimální teplotě T_1 cyklu, maximální dosažená teplota je n-krát větší, tj. $T_2 = nT_1$. Určete účinnost obou cyklů. (Převzato z [11.].)

10. Odhadněte počet molekul vzduchu, které za dobu Δt narazí na okenní tabulky vašeho pokoje

(a) zevnitř,

(b) zvenku. (Jaké předpoklady je třeba učinit, aby bylo možno výpočet provést? Vysvětlete.)

****

Příbuzné texty:

- *Hlavní text*
- *Nástraha první*
  Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- *Nástraha druhá*
  Vektory, průměty, složky, velikosti, ...aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- *Nástraha třetí*
  Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?
- *Nástraha čtvrtá*
  Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?
- *Nástraha pátá*
  Výtahy, vlaky, kolotoče, ... aneb Co náš čeká v neinerciálních soustavách?
- *Nástraha šestá*
  Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa
- *Nástraha sedmá*
  Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- *Nástraha osmá*
  Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- *Nástraha devátá*
  Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce