Závody válců
Řešení

Na Videoukázce máte možnost sledovat závody dvou válců po nakloněné rovině.

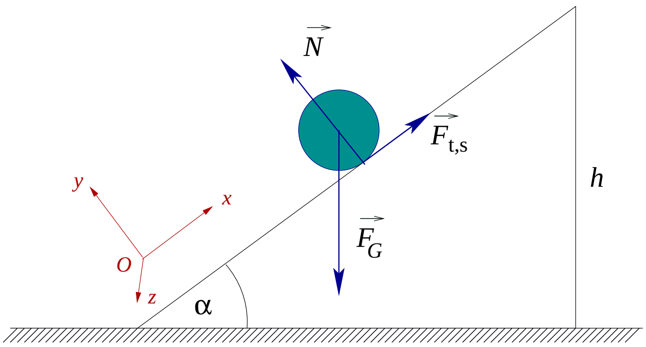
Úkol 1.:

Prověřte výpočtem, že závody vyhrává vždy ten z válců, který má menší moment setrvačnosti. (Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte, dále předpokládejte, že válce během pohybu nepodkluzují.)

Řešení:

Řešení tohoto úkolu se můžeme zhostit dvěma způsoby: první z nich využívá aplikace impulzových vět, druhý zákona zachování mechanické energie. Projdeme je postupně, jeden po druhém.

1. způsob — aplikace impulzových vět:



Obrázek 1: Silové působení na válec

Začneme, jako vždy, výčtem a nákresem působících sil (viz Obrázek 1). Na válec [1] o hmotnosti m a vnějším poloměru R působí v těžišti tíhová síla $\vec{F}_G$, v místech kontaktu válce s podložkou tlakové síly, jejichž výslednici označíme $\vec{N}$, a statické třecí síly s výslednicí $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}$ (statické proto, že válec během pohybu nepodkluzuje). Rovnice pro pohyb těžiště válce má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,s}}\,,$$

rovnice popisující otáčivý pohyb válce kolem jeho osy symetrie má tvar

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{t,s}}}\,,$$

kde $\vec{a}$ je zrychlení těžiště válce, J je moment setrvačnosti válce vzhledem k ose symetrie, $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení otáčivého pohybu válce kolem osy symetrie a $\vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{t,s}}}$ je moment statické třecí síly $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}$ vzhledem k ose symetrie (momenty ostatních sil vzhledem k této ose jsou nulové). V soustavě souřadnic $Oxyz$ podle Obrázku 1 (s uvážením vazební podmínky, že y-ová složka zrychlení těžiště válce je nulová) dostáváme skalární rovnice

$$\begin{aligned} ma &= F_G \sin\alpha - F_{\mathrm{t,s}}\,, \\ 0 &= N - F_G\cos\alpha\,, \\ J\varepsilon &= RF_{\mathrm{t,s}}\,. \end{aligned}$$

[1] Považujeme jej za tuhé homogenní těleso.

Po dosazení $F_G = mg$ (silový zákon) a $\varepsilon = \frac{a}{R}$ (válec nepodkluzuje) dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - F_{\mathrm{t,s}}\,, \\ 0 &= N - mg\cos\alpha\,, \\ J\,\frac{a}{R} &= RF_{\mathrm{t,s}}\,. \end{aligned}$$

Z první a třetí rovnice vychází pro zrychlení těžiště válce vztah

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{J}{R^2}} = \frac{mgR^2\sin\alpha}{mR^2 + J}\,. \tag{1}$$

Diskuze výsledku:
Z právě odvozeného vztahu vyplývá, že po nakloněné rovině se s větším zrychlením pohybuje ten válec, který má menší moment setrvačnosti, proto také bude na konci nakloněné roviny dříve.

2. způsob — aplikace zákona zachování mechanické energie:
Předpokládejme, že válec startuje z klidu z nejvyššího bodu nakloněné roviny, který je ve výšce h nad vodorovnou rovinou (viz Obrázek 1). Porovnáme-li mechanickou energii válce na startovní čáře a v cíli, tj. na konci nakloněné roviny, dostáváme

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh\,,$$

kde v, resp. ω je velikost rychlosti těžiště válce, resp. velikost úhlové rychlosti válce kolem osy symetrie v cíli. Dosadíme-li vztah $\omega = \frac{v}{R}$ (válec nepodkluzuje), vychází odtud

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2mghR^2}{mR^2 + J}}\,. \tag{2}$$

Diskuze výsledku:
Z právě odvozeného vztahu vyplývá, že v cíli (a vůbec, v každém bodě nakloněné roviny), má válec s menším momentem setrvačnosti větší rychlost, a proto závod vyhrává.

Poznámka:
Všimněte si, že z kinematických vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb těžiště válce

$$l = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}at^2\,, \quad v = at \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2ah/\sin\alpha}\,,$$

kde $l = h/\sin\alpha$ je délka nakloněné roviny, dostáváme po dosazení vztahu (1) pro zrychlení těžiště válce vztah (2) pro rychlost těžiště válce na konci nakloněné roviny.

Úkol 2.:

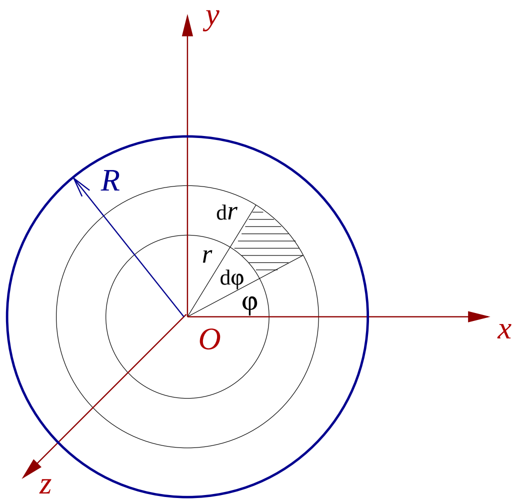
Dokážete odvodit vztah pro momenty setrvačnosti závodících válců? Oba válce mají stejný vnější poloměr R a stejnou hmotnost m, jeden z válců je plný, kdežto druhý obsahuje dutinu o vnitřním poloměru R_0. Předpokládejte, že válce jsou homogenní tuhá tělesa.

Řešení:

Při výpočtu momentu setrvačnosti válce vyjdeme z definičního vztahu

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m\,,$$

kde r je vzdálenost hmotnostního elementu $\mathrm{d}m$ od osy otáčení. Protože počítáme moment setrvačnosti válce, bude vhodné přejít od kartézských souřadnic k souřadnicím válcovým, v nichž $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,hr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ (viz Obrázek 2), kde ρ je hustota materiálu válce a h je jeho výška.



Obrázek 2: K výpočtu momentu setrvačnosti válce

- Pro plný válec platí

$$J_{\mathrm{p}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho\, h r^3 \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \pi \rho\, h \frac{R^4}{2}\,.$$

Dosadíme-li vztah mezi hustotou a objemem $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$, dostáváme známý výsledek

$$J_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m R^2\,. \tag{3}$$

- Pro dutý válec platí

$$J_{\mathrm{d}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_{R_0}^R \rho\, h r^3 \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \pi \rho\, h \frac{R^4 - R_0^4}{2}\,.$$

Opět dosadíme vztah mezi hustotou a objemem, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi\left(R^2 - R_0^2\right)h}$, a dostaneme

$$J_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2} m \frac{R^4 - R_0^4}{R^2 - R_0^2} = \frac{1}{2} m \frac{(R^2 - R_0^2)\,(R^2 + R_0^2)}{R^2 - R_0^2} = \frac{1}{2} m \left(R^2 + R_0^2\right)\,. \tag{4}$$

Diskuze výsledků:
Ze vztahů (3) a (4) vidíme, že plný válec má menší moment setrvačnosti než dutý válec o stejné hmotnosti, a proto bude závody na nakloněné rovině vždy vyhrávat.

Poznámka:
Pokuste se odvodit vztah (4) ještě jiným způsobem: uvědomte si při tom jednak, že moment setrvačnosti je aditivní veličinou, jednak, že dutý válec můžeme vyrobit tak, že z nějakého plného válce určitou část vyřízneme.