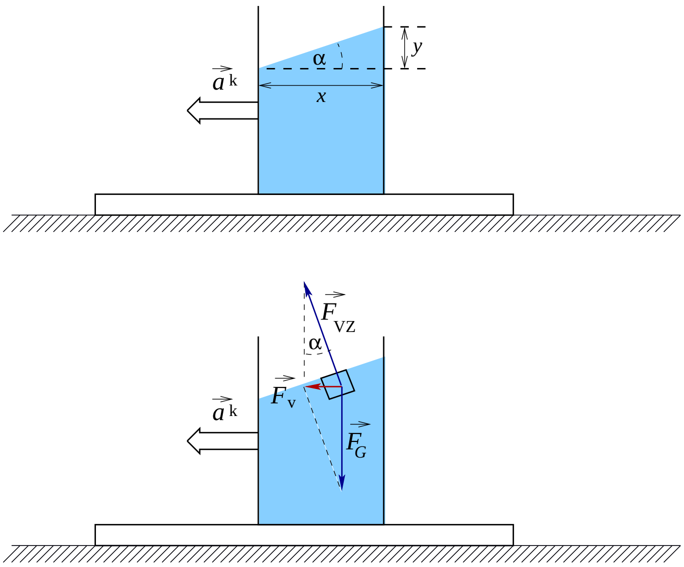
Vysunutí papíru zpod kádinky s vodou

Řešení

Na Videoukázkách 1–3 máte možnost shlédnout vysunutí listu papíru zpod kádinky s vodou, a to jak při reálné rychlosti experimentu, tak i zpomaleně.

Úkol 1.:

Je ze záznamů možné stanovit velikost zrychlení kádinky vzhledem k nehybnému stolu? Pokud ne, vysvětlete, pokud ano, určete je.



Obrázek 1: Pohyb kádinky se zrychlením

Řešení:

Zrychlení kádinky lze stanovit z úhlu, který svírá vodní hladina s vodorovnou rovinou (viz Obrázek 1, horní část). Vezmeme-li totiž v úvahu, že například na kapalinovou částici o hmotnosti m u hladiny působí Země tíhovou silou $\vec{F}_G$, okolní kapalina hydrostatickou vztlakovou silou $\vec{F}_{\mathrm{VZ}}$ a jejich výslednice $\vec{F}_{\mathrm{v}}$ udílí této částici zrychlení $\vec{a}^{\mathrm{k}}$ odpovídající zrychlení kádinky, platí (viz Obrázek 1, dolní i horní část)

$$\tan\alpha = \frac{F_{\mathrm{v}}}{F_G} = \frac{ma^{\mathrm{k}}}{mg} = \frac{a^{\mathrm{k}}}{g} = \frac{y}{x}$$

a odtud $a^{\mathrm{k}} = g\,\frac{y}{x}$. Dosadíme-li za tíhové zrychlení $g \doteq 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ a za x, y hodnoty naměřené například při pozastavení Videoukázky 2, tj. $x \doteq 20$ mm, $y \doteq 5$ mm, vychází $a^{\mathrm{k}} \doteq 2,5\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Úkol 2.:

Bylo by možné provést experiment tak, aby se kádinka vzhledem ke stolu pohybovala spolu s papírem, tj. aby byla vůči papíru v klidu? Jaké veličiny je nutno zadat, aby bylo možné pohyb papíru vzhledem ke stolu kvantitativně popsat a výsledky popisu porovnat s experimentem? Proveďte příslušný výpočet.

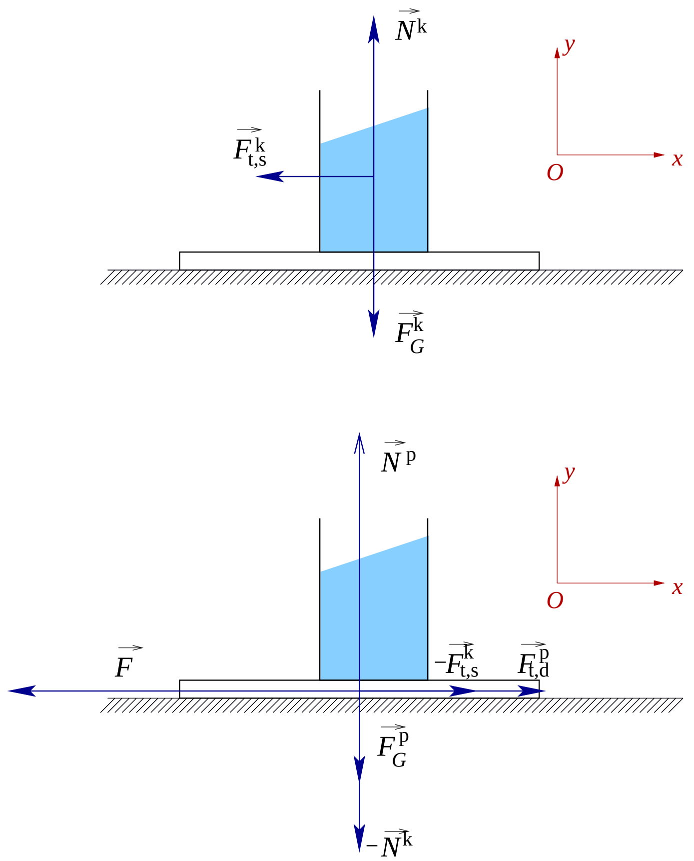
Řešení:

Intuice nám napovídá, že při vhodném silovém působení na papír se kádinka bude vzhledem ke stolu pohybovat spolu s papírem. Protože ale intuice může být někdy zrádná, prověřme ji výpočtem. Začneme, jako vždy, výčtem a nákresem všech sil, které vstupují do hry:

- na kádinku působí Země tíhovou silou $\vec{F}_G^{\mathrm{k}}$ a papír tlakovou silou $\vec{N}^{\mathrm{k}}$ a statickou třecí silou $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}$, statickou proto, že kádinka je vzhledem k papíru v klidu (viz Obrázek 2, horní část; působiště jednotlivých sil jsou pro jednoduchost zakreslena do jednoho bodu — dopouštíme se tím chyby?);

- na papír působí ruka experimentátora silou $\vec{F}$ (pro jednoduchost předpokládejme, že tato síla má vodorovný směr), Země tíhovou silou $\vec{F}_G^{\mathrm{p}}$, stůl tlakovou silou $\vec{N}^{\mathrm{p}}$ a dynamickou třecí silou $\vec{F}_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{p}}$ a kádinka statickou třecí silou $-\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}$ a tlakovou silou $-\vec{N}^{\mathrm{k}}$ (viz Obrázek 2, dolní část).

(Vzpomínáte si, že s podobnou situací jsme se setkali v ***Úloze 2. Nástrahy tření***?)



Obrázek 2: Silové diagramy pro kádinku a pro papír

Druhý Newtonův zákon pro kádinku o hmotnosti m^{k} má tvar

$$m^{\mathrm{k}}\vec{a}^{\mathrm{k}} = \vec{F}_G^{\mathrm{k}} + \vec{N}^{\mathrm{k}} + \vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}\,,$$

pro papír o hmotnosti m^{p} pak

$$m^{\mathrm{p}}\vec{a}^{\mathrm{p}} = \vec{F} + \vec{F}_G^{\mathrm{p}} + \vec{N}^{\mathrm{p}} + \vec{F}_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{p}} - \vec{N}^{\mathrm{k}} - \vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}\,.$$

Protože se kádinka vzhledem ke stolu pohybuje spolu s papírem, platí, s uvážením vazební podmínky (kádinka se pohybuje pouze ve vodorovném směru) ve zvolené soustavě souřadnic Oxy

$$\vec{a}^{\mathrm{k}} = \vec{a}^{\mathrm{p}} = \vec{a} = (-a, 0)\,.$$

(Všimněme si znaménka minus v první složce zrychlení: toto znaménko vyjadřuje skutečnost, že $a > 0$ a společné zrychlení kádinky a papíru je nesouhlasně rovnoběžné s osou x.) Vyjádříme-li v soustavě souřadnic Oxy také složky ostatních vektorů

$$\vec{F}_G^{\mathrm{k}} = \left(0, -F_G^{\mathrm{k}}\right)\,, \qquad \vec{N}^{\mathrm{k}} = \left(0, N^{\mathrm{k}}\right)\,, \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}} = \left(-F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}, 0\right)\,,$$

$$\vec{F} = (-F, 0)\,, \qquad \vec{F}_G^{\mathrm{p}} = (0, -F_G^{\mathrm{p}})\,, \qquad \vec{N}^{\mathrm{p}} = (0, N^{\mathrm{p}})\,,$$

$$\vec{F}_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{p}} = \left(F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{p}}, 0\right)\,, \qquad -\vec{N}^{\mathrm{k}} = \left(0, -N^{\mathrm{k}}\right)\,, \qquad -\vec{F}_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}} = \left(F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}, 0\right)\,,$$

dostáváme druhý Newtonův zákon pro kádinku zapsaný ve složkách

$$\begin{aligned} x: \quad -m^{\mathrm{k}}a &= -F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}\,, \\ y: \quad 0 &= -F_G^{\mathrm{k}} + N^{\mathrm{k}} \end{aligned}$$

a pro papír pak

$$\begin{aligned} x: \quad -m^{\mathrm{p}}a &= -F + F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{p}} + F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}\,, \\ y: \quad 0 &= -F_G^{\mathrm{p}} + N^{\mathrm{p}} - N^{\mathrm{k}}\,, \end{aligned}$$

s přihlédnutím k silovým zákonům pro velikosti tíhových sil $F_G^{\mathrm{k}} = m^{\mathrm{k}}g$, $F_G^{\mathrm{p}} = m^{\mathrm{p}}g$ a pro velikost dynamické třecí síly $F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{p}} = f^{\mathrm{p}}N^{\mathrm{p}}$, kde f^{p} je koeficient dynamického tření mezi papírem a stolem, pak nakonec pro kádinku

$$\begin{aligned} x: \quad -m^{\mathrm{k}}a &= -F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}\,, &(1)\\ y: \quad 0 &= -m^{\mathrm{k}}g + N^{\mathrm{k}} &(2)\end{aligned}$$

a pro papír pak

$$\begin{aligned} x: \quad -m^{\mathrm{p}}a &= -F + f^{\mathrm{p}}N^{\mathrm{p}} + F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}}\,, &(3)\\ y: \quad 0 &= -m^{\mathrm{p}}g + N^{\mathrm{p}} - N^{\mathrm{k}}\,. &(4)\end{aligned}$$

Z rovnic (2) a (4) dostáváme

$$N^{\mathrm{k}} = m^{\mathrm{k}}g\,, \qquad N^{\mathrm{p}} = m^{\mathrm{p}}g + N^{\mathrm{k}} = \left(m^{\mathrm{p}} + m^{\mathrm{k}}\right)g\,,$$

z rovnic (1) a (3) pak

$$F = \left(\frac{m^{\mathrm{p}}}{m^{\mathrm{k}}} + 1\right)F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}} + f^{\mathrm{p}}N^{\mathrm{p}} = \left(\frac{m^{\mathrm{p}}}{m^{\mathrm{k}}} + 1\right)F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k}} + f^{\mathrm{p}}\left(m^{\mathrm{p}} + m^{\mathrm{k}}\right)g\,.$$

Maximální velikost síly $\vec{F}$, jíž působí experimentátor na papír, je určena maximální přípustnou velikostí statické třecí síly mezi papírem a kádinkou $F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k,max}} = f_0^{\mathrm{k}}N^{\mathrm{k}} = f_0^{\mathrm{k}}m^{\mathrm{k}}g$, kde f_0^{k} je koeficient statického tření mezi kádinkou a papírem. Aby se tedy kádinka vzhledem ke stolu pohybovala spolu s papírem, musí experimentátor působit na papír silou o velikosti

$$F \leq \left(\frac{m^{\mathrm{p}}}{m^{\mathrm{k}}} + 1\right)F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k,max}} + f^{\mathrm{p}}\left(m^{\mathrm{p}} + m^{\mathrm{k}}\right)g = \left(f_0^{\mathrm{k}} + f^{\mathrm{p}}\right)\left(m^{\mathrm{k}} + m^{\mathrm{p}}\right)g\,. \tag{5}$$

Společné zrychlení papíru a kádinky vzhledem ke stolu pak určíme z rovnic (1) a (3):

$$a = \frac{F - f^{\mathrm{p}}N^{\mathrm{p}}}{m^{\mathrm{p}} + m^{\mathrm{k}}} = \frac{F - f^{\mathrm{p}}\left(m^{\mathrm{p}} + m^{\mathrm{k}}\right)g}{m^{\mathrm{p}} + m^{\mathrm{k}}}\,. \tag{6}$$

K určení okamžitého zrychlení papíru je tedy třeba znát okamžitou velikost síly, jíž na papír působí experimentátor (její maximální přípustná velikost je určena vztahem (5)), hmotnost kádinky, hmotnost papíru a koeficient dynamického tření mezi papírem a stolem (a samozřejmě také tíhové zrychlení). Napadne vás, jak lze jednotlivé veličiny změřit?

Úkol 3.:

Bylo by možné provést experiment tak, aby se kádinka při vysouvání papíru vzhledem ke stolu nepohybovala? Vysvětlete.

Řešení:

Řešení tohoto úkolu již bude jednoduché. Z předchozích úvah je totiž zřejmé, že kádinka se vzhledem k papíru pohne poté, co statická třecí síla dosáhne své maximální přípustné velikosti $F_{\mathrm{t,s}}^{\mathrm{k,max}} = f_0^{\mathrm{k}}N^{\mathrm{k}} = f_0^{\mathrm{k}}m^{\mathrm{k}}g$. Poté bude kádince vzhledem ke stolu udílet zrychlení dynamická třecí síla o velikosti $F_{\mathrm{t,d}}^{\mathrm{k}} = f^{\mathrm{k}}N^{\mathrm{k}} = f^{\mathrm{k}}m^{\mathrm{k}}g$, tj. $a^{\mathrm{k}} = f^{\mathrm{k}}g$, kde f^{k} je koeficient dynamického tření mezi kádinkou a papírem. Pokud se tedy kádinka vzhledem ke stolu při vysouvání papíru nemá pohybovat, musí být koeficienty statického i dynamického tření mezi kádinkou a papírem nulové. Tento požadavek však v praxi nebývá splněn.