

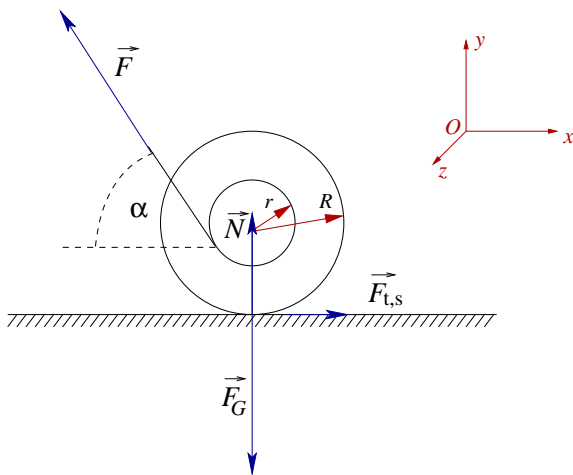
Odvalování cívky

Řešení

Na Videokázce máte možnost sledovat odvalování cívky po vodorovném stole v závislosti na směru síly, jíž působí experimentátor na provázek.

Úkol 1.:

Jaký musí být směr síly, jíž působí experimentátor na provázek, aby se těžiště odvalující se cívky pohybovalo doprava, resp. doleva? Proveďte příslušný výpočet.



Obrázek 1: Silové působení na cívku

Řešení:

Začneme, jako vždy, výčtem a nákresem působících sil (viz Obrázek 1). Na cívku¹ o hmotnosti m , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R působí v těžišti tíhová síla \vec{F}_G , v místech kontaktu cívky s podložkou tlakové síly, jejichž výslednici označíme \vec{N} , a statické třecí síly s výslednicí $\vec{F}_{t,s}$ (statické proto, že cívka nepodkluzuje), a experimentátor prostřednictvím provázku silou \vec{F} . Rovnice pro pohyb těžiště cívky má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{t,s},$$

rovnice popisující otáčivý pohyb cívky kolem její osy symetrie má tvar

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{F}_{t,s}},$$

kde \vec{a} je zrychlení těžiště cívky, J je moment setrvačnosti cívky vzhledem k ose symetrie, $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení otáčivého pohybu cívky kolem osy symetrie a $\vec{M}_{\vec{F}}$ a $\vec{M}_{\vec{F}_{t,s}}$ jsou momenty síly \vec{F} a statické třecí síly $\vec{F}_{t,s}$ vzhledem k ose symetrie (momenty ostatních sil vzhledem k této ose jsou nulové). V soustavě souřadnic $Oxyz$ podle Obrázku 1 (s uvážením skutečnosti, že těžiště cívky se pohybuje pouze ve vodorovném směru) dostáváme skalární rovnice

$$\begin{aligned} ma &= F \cos \alpha - F_{t,s}, \\ 0 &= F \sin \alpha + N - F_G, \\ J\varepsilon &= RF_{t,s} - rF. \end{aligned}$$

Po dosazení $F_G = mg$ a $\varepsilon = \frac{a}{R}$ (cívka nepodkluzuje) dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} ma &= F \cos \alpha - F_{t,s}, \\ 0 &= F \sin \alpha + N - mg, \\ J \frac{a}{R} &= RF_{t,s} - Fr. \end{aligned}$$

¹Považujeme ji za tuhé homogenní těleso.

Z první a třetí rovnice dostáváme pro zrychlení těžiště cívky

$$a = \frac{F(R \cos \alpha - r)}{\frac{J}{R} + mR}$$

Diskuze výsledku:

Bez ohledu na velikost síly \vec{F} platí:

- pro $\cos \alpha > \frac{r}{R}$ je $a > 0$ a cívka původně v klidu se roztáčí doleva (co se stane, pokud se těžiště cívky původně pohybovalo doprava?);
- pro $\cos \alpha = \frac{r}{R}$ je $a = 0$ a těžiště cívky je v klidu, nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém;
- pro $\cos \alpha < \frac{r}{R}$ je $a < 0$ a cívka původně v klidu se roztáčí doprava (co se stane, pokud se těžiště cívky původně pohybovalo doleva?).

Úkol 2.:

Jaká musí být síla, jíž působí experimentátor na provázek, aby cívka při pohybu po stole podkluzovala? Je v tomto případě možné stanovit zrychlení těžiště a úhlové zrychlení otáčení cívky kolem osy symetrie? Pokud ano, proveďte příslušné výpočty.

Řešení:

Z předchozích výsledků dostáváme pro velikost statické třecí síly mezi cívkou a stolem vztah

$$F_{t,s} = F \cos \alpha - ma = F \left(\cos \alpha - m \frac{R \cos \alpha - r}{\frac{J}{R} + mR} \right).$$

Aby cívka nepodkluzovala, musí platit

$$F_{t,s} = F \left(\cos \alpha - m \frac{R \cos \alpha - r}{\frac{J}{R} + mR} \right) \leq F_{t,s}^{\max} = f_0 N = f_0 mg,$$

kde f_0 je koeficient statického tření mezi cívkou a stolem. Pokud tedy velikost a směr síly \vec{F} , jíž působí na provázek experimentátor, nesplňují právě odvozenou nerovnost, bude cívka po stole podkluzovat. V předchozích výpočtech pak pouze stačí nahradit velikost statické třecí síly mezi stolem a cívkou $F_{t,s}$ velikostí dynamické třecí síly $F_{t,d} = fN = fmg$, kde f je koeficient dynamického tření mezi cívkou a stolem. Pro zrychlení těžiště cívky a pro úhlové zrychlení otáčivého pohybu cívky kolem osy symetrie pak dostáváme

$$a = \frac{F \cos \alpha}{m} - fg$$

a

$$\varepsilon = \frac{Rfm - rF}{J}.$$

Dodejme, že v případě podkluzování cívky neplatí mezi veličinami a a ε vztah $\varepsilon = \frac{a}{R}$.